Uniwersytet Zielonogórski
Wydział Elektrotechniki, Informatyki i Telekomunikacji
Instytut Metrologii Elektrycznej

PRACA DOKTORSKA

Mirosław Kozioł

Synteza cyfrowych filtrów quasi-odwrotnych w klasie układów nieprzyczynowych

Promotor: **prof. dr hab. inż. Maciej Siwczyński**

Zielona Góra, listopad 2005

Spis treści

Wykaz ważniejszych oznaczeń **5**

1. Wprowadzenie **6**

1.1. Dyskretyzacja otoczenia analogowego 6

1.2. Korekcja obwodów wejściowych po stronie cyfrowej 7

1.3. Przykłady zastosowań układów odwrotnych 8

1.4. Zakres pracy 9

2. Odwrotne filtry korekcyjne **12**

2.1. Synteza w dziedzinie czasu 13

2.2. Synteza w dziedzinie częstotliwości 15

2.3. Filtr korekcyjny jako układ nieprzyczynowy 17

2.3.1. Układy nieprzyczynowe, przyczynowe i antyprzyczynowe 18

2.3.2. Stabilność układów nieprzyczynowych 22

2.4. Teza 26

3. Synteza filtrów quasi-odwrotnych **28**

3.1. Podstawy matematyczne 28

3.1.1. Przestrzeń wektorowa sygnałów 29

3.1.2. Przestrzeń wektorowa sygnałów a przekształcenie $\mathcal{Z}$ 34

3.1.3. Definicje kryteriów optymalizacyjnych 35

3.2. Określenie zadań optymalizacyjnych 36

3.3. Rozwiązanie zadań optymalizacyjnych – filtry quasi-odwrotne 38

3.3.1. Pierwsze zadanie optymalizacyjne 39

3.3.2. Drugie zadanie optymalizacyjne 41

4. Filtry quasi-odwrotne w dziedzinie czasu i częstotliwości **43**
4.1. Wymierna transmitancja filtru quasi-odwrotnego 43
4.1.1. Pierwsze zadanie optymalizacyjne 44
4.1.2. Drugie zadanie optymalizacyjne 51
4.1.3. Transformacja do postaci wielomianowej 51
4.2. Charakterystyki częstotliwościowe 53
4.3. Analityczna interpretacja funkcji stabilności i aproksymacji 54
4.3.1. Pierwsze zadanie optymalizacyjne 54
4.3.2. Drugie zadanie optymalizacyjne 57
4.4. Interpretacja rozwiązań zadań optymalizacyjnych w dziedzinie czasu 59
4.5. Przetwarzanie sygnałów w dziedzinie czasu 59
4.5.1. Równania różnicowe dla filtrów prostych 60
4.5.2. Przetwarzanie sygnałów o skończonym czasie trwania 63
4.5.3. Filtracja sygnałów o nieskończonym czasie trwania 68

5. Przykłady symulacyjne **70**
5.1. Numeryczne wyznaczanie wartości mnożnika λ 70
5.2. Przykład 1 74
5.3. Przykład 2 84
5.4. Przykład 3 90
5.5. Przykład 4 92

6. Podsumowanie **98**
6.1. Podsumowanie wyników prac 98
6.2. Przewidywane dalsze prace 99

A. Wybrane szczegółowe przekształcenia **100**
A.1. Przekształcenia dotyczące wzoru (3.62) 100
A.2. Przekształcenia dotyczące wzoru (3.74) 101

B. Dowody twierdzeń **102**
B.1. Twierdzenie 2.3 - część przyczynowa 102
B.2. Twierdzenie 2.3 - część antyprzyczynowa 104
B.3. Twierdzenie 3.2 106
B.4. Twierdzenie 3.3 107

Bibliografia **110**

Wykaz ważniejszych oznaczeń

$\mathbb{I}$	zbiór liczb całkowitych
$\mathbb{R}$	zbiór liczb rzeczywistych
$\{a_n\}$	sygnał dyskretny
a_n	n-ta próbka sygnału dyskretnego
$\boldsymbol{a}$	wektor próbek sygnału $\{a_n\}$
$\|\boldsymbol{a}\|$	norma wektora $\boldsymbol{a}$
$\{a_{-n}\}$	sygnał dyskretny odwrócony w czasie względem próbki a_0 sygnału $\{a_n\}$
$\boldsymbol{a}^\sharp$	wektor próbek sygnału $\{a_{-n}\}$
$\boldsymbol{A}$	macierz operatora splotu wyznaczona na podstawie wektora $\boldsymbol{a}$
$\boldsymbol{A}^*$	macierz sprzężonego operatora splotu wyznaczana na podstawie wektora $\boldsymbol{a}^\sharp$
$\mathbf{1}$	macierz tożsamościowego operatora splotu, macierz jednostkowa
$A(z)$	transformata $\mathcal{Z}$ sygnału $\{a_n\}$
$\{h_n\}$	sygnał dyskretnej odpowiedzi impulsowej układu korygowanego
$H(z)$	transmitancja układu korygowanego
$\{g_n\}$	sygnał dyskretnej odpowiedzi impulsowej filtru korekcyjnego
$G(z)$	transmitancja filtru korekcyjnego
p_i	i-ty biegun funkcji transmitancji
σ_i	krotność bieguna p_i

1. Wprowadzenie

1.1. Dyskretyzacja otoczenia analogowego

Chociaż otaczający nas świat ma naturę analogową, to jednak ogromna większość dziedzin techniki rejestruje, przetwarza i przesyła informacje w postaci cyfrowej. Ten pęd ku dyskretyzacji ma kilka przyczyn. Jedną z nich jest większa odporność na zakłócenia. Ma to niebagatelne znaczenie w dzisiejszym zelektryfikowanym świecie. Kolejną przyczyną przemawiającą za przetwarzaniem informacji na postać cyfrową jest możliwość realizacji różnych algorytmów przy wykorzystaniu tej samej konfiguracji sprzętowej urządzenia, gdyż ich implementacja może przebiegać na drodze programowej w oparciu o jednostkę mikroprocesorową. Daje to ogromną elastyczność, gdyż niektóre modyfikacje rozszerzające możliwości urządzenia mogą być przeprowadzane wyłącznie przez zmianę jego oprogramowania, bez konieczności zmiany struktury sprzętowej. Dodatkowo raz zaprojektowane urządzenie może być produkowane niemalże w 100% powtarzalności, a zaimplementowany w nim algorytm będzie działał w każdym z nich tak samo [4]. W celu skrócenia czasu przesyłania dużej ilości informacji możliwe jest również zastosowanie różnych algorytmów kompresji danych.

Znacząca większość obecnie produkowanych urządzeń pomiarowych poddaje się tej tendencji, przeprowadzając pomiary w oparciu o dyskretną reprezentację sygnału będącego nośnikiem informacji. Zamiana mierzonych sygnałów napięć, prądów czy też innych wielkości na ich reprezentację cyfrową realizowana jest przez zastosowanie przetwornika analogowo-cyfrowego, na którego wejście może być jednak podawany tylko sygnał napięciowy o wartościach mieszczących się w określonym zakresie. Stąd w przypadku pomiaru wyższych napięć lub innego typu wielkości, konieczne jest zastosowanie tzw. obwodów wejściowych. Jeśli w całym paśmie częstotliwościowym przetwarzanych sygnałów charakterystyka amplitudowa takiego obwodu nie jest równomierna, zaś charakterystyka fazowa liniowa, to przejście sygnału przez taki układ prowadzi do zmiany jego widma, a więc zniekształcenia informacji jaką niesie.

Istnieją dwa możliwe podejścia poprawy dokładności przetwarzania sygnałów przez obwo-

dy wejściowe. Mianowicie korekcję sygnału można przeprowadzić jeszcze po stronie analogowej, zanim zostanie zamieniony na postać cyfrową. W tym celu wykorzystuje się przeważnie metody konstrukcyjne polegające na optymalizacji parametrów obwodu do zadowalającego poziomu m.in. przez dołączenie dodatkowych układów [4, 50, 60]. Niestety dość często metody te są trudne w realizacji, chociażby ze względu na konieczność bardzo precyzyjnego doboru parametrów tych układów. Dodatkowo konieczność poniesienia niejednokrotnie znacznych kosztów sprawia, że stają się mało opłacalne. Korzystniejsza i łatwiejsza do zrealizowania wydaje się korekcja po stronie cyfrowej.

1.2. Korekcja obwodów wejściowych po stronie cyfrowej

Dysponując w urządzeniu częścią mikroprocesorową, pod uwagę może być brana również korekcja programowa po stronie cyfrowej. Na przykład znajomość charakterystyk częstotliwościowych obwodu wejściowego umożliwia wprowadzenie poprawek do poszczególnych harmonicznych przetwarzanego sygnału. Zastosowanie takiego podejścia w pracy [17] do korekcji transformatorowych obwodów wejściowych wpłynęło znacząco na zmniejszenie błędów przy pomiarach mocy sygnałów odkształconych.

Niejako wymuszona konfiguracja układowa, w której obwód wejściowy jest połączony kaskadowo z częścią mikroprocesorową poprzez przetwornik analogowo-cyfrowy oraz zastosowanie korekcji po stronie cyfrowej sugerują, iż przetwarzany sygnał może być odtworzony do kształtu, jaki posiadał przed wejściem na obwód wejściowy przez zaimplementowanie w części mikroprocesorowej filtru cyfrowego, który w kaskadzie z obwodem wejściowym tworzyłby układ tożsamościowy, tj. układ o jednostkowej charakterystyce amplitudowej i zerowej charakterystyce fazowej. Przeprowadzanie korekcji sygnału w taki sposób wydaje się być osiągalne, ze względu na możliwość praktycznie dowolnego kształtowania charakterystyk filtrów cyfrowych.

Do określenia struktury filtru cyfrowego wymagana jest znajomość modelu matematycznego obwodu wejściowego w postaci transmitancji bądź jego odpowiedzi impulsowej. Odpowiednie dane potrzebne do określenia takiego modelu można uzyskać dysponując modelem zastępczym korygowanego obwodu wejściowego [6] lub przeprowadzając jego identyfikację na drodze pomiarowej. Drugi ze sposobów jest częściej wykorzystywany w przypadkach, kiedy korygowany jest nie tylko obwód wejściowy lecz cały tor pomiarowy włącznie z filtrem anty-

aliasingowym [22, 48] lub gdy analityczne określenie modelu jest skomplikowane. Dostępność obydwu podejść daje możliwość porównania, która z metod (analityczna czy eksperymentalna) pozwala na uzyskanie zadowalających rezultatów [19]. Zaprojektowanie odpowiedniego filtru cyfrowego nie jest już sprawą trudną i sprowadza się do znalezienia układu odwrotnego do zadanego, jak postąpiono np. w [22].

Problem może jednak stanowić stabilność uzyskanego filtru. W praktyce analogowe transmitancje torów pomiarowych są przeważnie minimalnofazowe. Jednak odpowiadające im modele w dziedzinie układów dyskretnych nie muszą posiadać tej własności [7, 38, 48]. Zatem jeśli korygowany obwód wejściowy nie jest minimalnofazowy, to jego przyczynowa odwrotność nie jest stabilna.

1.3. Przykłady zastosowań układów odwrotnych

Przedstawiony problem korekcji zniekształceń wprowadzanych do sygnałów przetwarzanych przez obwody wejściowe urządzeń pomiarowych jest jednym z wielu przykładów, gdzie istnieje konieczność poszukiwania układu odwrotnego. Na przykład w pomiarach chromatograficznych i spektrometrycznych sygnał pomiarowy ma szczególny kształt składający się z szeregu wąskich krzywych gaussowskich. Wpływ transmitancji urządzenia pomiarowego powoduje degradację ich rozdzielczości, to jest np. zlewanie się krzywych występujących bardzo blisko siebie [9]. Znajomość odpowiedzi impulsowej urządzenia pozwala w takim wypadku na likwidację jego wpływu na mierzony sygnał, co owocuje zwiększeniem rozdzielczości spektrogramów.

Przykładem z zupełnie innej dziedziny może być filtracja odwrotna sygnałów dźwiękowych w pomieszczeniach, która pozwala na pozbycie się odbić dźwięku od ścian [38]. Akustyczny kanał transmisyjny w ogólności jest układem nieminimalnofazowym, dlatego w celu zaprojektowania stabilnego filtru odwrotnego wprowadza się np. dodatkowe tory transmisyjne. Natomiast podczas generacji dźwiękowego sygnału przestrzennego filtracja odwrotna stosowana jest w celu zmniejszenia wpływu charakterystyk zastosowanych głośników na generowany sygnał [41]. Podczas wielokanałowego odtwarzania dźwięku filtracja odwrotna umożliwia z kolei korekcję ewentualnych opóźnień w poszczególnych kanałach [43]. Innym przykładem jest poprawa jakości dźwięku filmowego, który do lat 50-tych XX wieku był zapisywany optycznie na skraju taśmy za pomocą intensywności barwy [2, 3]. Charakterystyka gęstości taśmy filmowej jest nieliniową funkcją intensywności barwy, dlatego przy dźwiękach o wysokim natężeniu lub złym punkcie pracy (poza fragmentem zbliżonym do liniowego), nagrany dźwięk zostaje

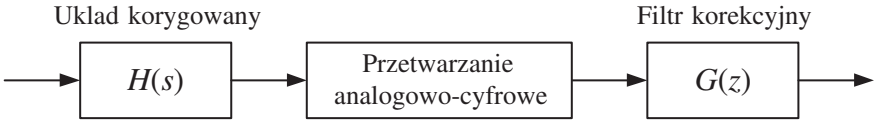
zniekształcony lub nawet może być niezrozumiały.

Metody filtracji odwrotnej dotyczą nie tylko sygnałów jednowymiarowych, lecz także dwuwymiarowych, tj. obrazów. W wielu przypadkach są one zniekształcane przez różnego rodzaju niedoskonałości systemów optycznych używanych przy ich pozyskiwaniu [13, 11].

W ogólnym przypadku układy odwrotne są pożądane wszędzie tam, gdzie wymagane jest zniwelowanie wpływu pewnej części toru przez który przechodzi sygnał, gdyż ze względu na swoje właściwości dynamiczne dokonuje on zmiany jego widma, przez co przesyłana informacja zostaje zniekształcona. Zgodnie z klasyfikacją przyjętą w [39], ten typ korekcji określany jest mianem korekcji dynamicznej.

1.4. Zakres pracy

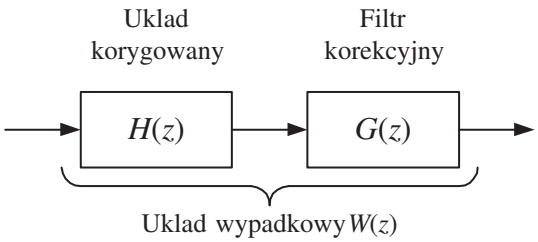
W pracy skoncentrowano się na przypadku korekcji wpływu urządzeń pomiarowych na mierzony sygnał. Stąd w dalszej części pracy przyjęto następujące ujednolicone nazewnictwo co do układów, jakie można wyróżnić dla rozpatrywanego przypadku korekcji. Część toru pomiarowego wprowadzająca zniekształcenia będzie określana mianem ***układu zniekształcającego*** lub ***korygowanego***, gdyż podlega korekcji z wykorzystaniem filtru cyfrowego. Natomiast filtr cyfrowy przeprowadzający korekcję w układzie kaskadowym będzie określany mianem ***filtru korekcyjnego***. Przy odnoszeniu się do układu powstałego przez kaskadowe połączenie układu zniekształcającego i filtru korekcyjnego jako całości, będzie używany termin ***układ wypadkowy***.



Rys. 1.1. Konfiguracja układu korygowanego i cyfrowego filtru korekcyjnego dla rozpatrywanego przypadku korekcji

Przy syntezie cyfrowego filtru korekcyjnego zakłada się, że układ korygowany jest przyczynowy, liniowy i niezmienny w czasie, a jego model matematyczny jednoznacznie określa transmitancja $H(z)$ lub dyskretna odpowiedź impulsowa $\{h_n\}$. Odpowiada to konfiguracji uproszczonej przedstawionej na rysunku 1.2.

Pełne rozpatrzenie problemu korekcji układu analogowego realizowanej przez filtr cyfrowy wymaga oczywiście uwzględnienia wpływu zastosowanego przekształcenia, które umożliwia uzyskanie transmitancji $H(z)$ na podstawie transmitancji $H(s)$, oraz wpływu rozdzielczości



Rys. 1.2. Uproszczona konfiguracja układu korygowanego i cyfrowego filtru korekcyjnego dla rozpatrywanego przypadku korekcji

przetwornika analogowo-cyfrowego na jakość korekcji. Jednak uwzględnienie tych dodatkowych czynników znacznie skomplikowałoby poszukiwanie użytecznego rozwiązania, a także interpretację uzyskiwanych wyników. Z tego powodu prezentowane rozwiązania nie uwzględniają tych dwóch elementów. Ze względu na założoną ogólność rozpatrywanego zagadnienia, w pracy nie rozpatrywano również zagadnienia związanego z adekwatnością modelu matematycznego układu korygowanego w stosunku do układu rzeczywistego.

Kolejne rozdziały pracy dotyczą syntezy stabilnych, cyfrowych filtrów korekcyjnych, które w połączeniu kaskadowym z układem zniekształcającym umożliwiają zniwelowanie jego wpływu na sygnał będący nośnikiem informacji, tj. przywrócenie sygnałowi widma, jakie miał przed wejściem na układ zniekształcający. W rozdziale 2. pokazano ograniczone możliwości syntezy takich filtrów w klasie układów przyczynowych szczególnie w przypadku, gdy charakterystyka fazowa układu wypadkowego powinna być zerowa. Ze względu na ten fakt zdecydowano się rozszerzyć dziedzinę poszukiwanych filtrów na układy nieprzyczynowe. Jak udowodniono, odpowiedni podział układu korekcyjnego na część przyczynową i antyprzyczynową umożliwia uzyskanie układu stabilnego w sensie BIBO.

Pomimo zastosowania takiego podejścia, wciąż jednak otwartą kwestią jest przypadek, kiedy korekcyjny filtr cyfrowy, będący idealną odwrotnością układu korygowanego, posiada bieguny znajdujące się na okręgu jednostkowym. Dlatego w rozdziale 3. zastosowano metody optymalizacyje w celu uzyskania stabilnych filtrów korekcyjnych, które w kaskadzie z układem korygowanych tworzą jak najlepsze przybliżenie układu tożsamościowego. Od strony matematycznej takie postępowanie jest określane mianem regularyzacji i dotyczy np. rozwiązywania źle uwarunkowanych równań całkowych lub układów równań liniowych. Regularyzacja polega wówczas na zniekształceniu rozwiązywanego zadania tak, aby spełnić zadane warunki optymalizacyjne. W niniejszej pracy poszukiwanie optymalnego rozwiązania doprowadziło do uzyskania rodziny filtrów quasi-odwrotnych, które w zależności od przyjętych parametrów, jak zdefiniowany wskaźnik stabilności lub wskaźnik aproksymacji układu tożsamościowego,

pozwalają na określone przybliżenie układu wypadkowego do układu tożsamościowego.

Uzyskaną klasę filtrów przeanalizowano w rozdziale 4. zarówno w dziedzinie czasu, jak również w dziedzinie częstotliwości prezentując m.in. specyficzny rozkład biegunów. Dokonano analitycznej interpretacji zdefiniowanych w poprzednim rozdziale funkcji stabilności i aproksymacji pokazując, że dla określonej wartości kryterium optymalizacyjnego uzyskuje się zawsze jedno i tylko jedno rozwiązanie optymalne. Pokazano także, że parametr regularyzacyjny wpływa tylko na kształt charakterystyk amplitudowych filtrów quasi-odwrotnych, natomiast charakterystyki fazowe pozostają niezależne od niego. Dzięki temu uzyskuje się zawsze pełną kompensację zniekształceń fazowych. Ze względu na fakt przynależności filtrów quasi-odwrotnych do klasy układów nieprzyczynowych, przeanalizowano również możliwość przetwarzania sygnałów o nieskończonym lub co najmniej bardzo długim czasie trwania.

Dla poparcia uzyskanych wyników, w rozdziale 5. przeprowadzono symulacyjną korekcję kilku układów zniekształcających. Ich transmitancje dobrano w taki sposób, aby posiadały zera leżące na okręgu jednostkowym lub w bardzo małej odległości od niego. Przeanalizowano również numeryczną metodę wyznaczania wartości parametru regularyzacyjnego pod względem zbieżności.

W zakończeniu pracy przedstawiono podsumowanie uzyskanych wyników. Określono również zarys dalszych planowanych prac, które wiążą się bezpośrednio z praktycznym wykorzystaniem przedstawionych wyników.

2. Odwrotne filtry korekcyjne

Zgodnie z założeniami poczynionymi w poprzednim rozdziale, korekcję układu lub toru pomiarowego opisanego w dziedzinie czasu lub częstotliwości, mającą na celu uzyskanie wypadkowego układu tożsamościowego, najwygodniej jest przeprowadzić poprzez kaskadowe dołączenie cyfrowego filtru korekcyjnego. Wymaga to wyznaczenia układu odwrotnego do układu korygowanego. Osiągnięcie tak postawionego celu bez specyfikacji dodatkowych ograniczeń i wymagań, nie jest zadaniem skomplikowanym. Jak się okazuje, jest ono łatwiejsze do przeprowadzenia w dziedzinie częstotliwości niż w dziedzinie czasu. Jednak aby rozszerzyć możliwości realizacyjne wyznaczanie układów odwrotnych zostanie przedstawione w obu tych dziedzinach.

Brak dodatkowych wymagań powoduje, że uzyskany filtr będący dokładną odwrotnością układu korygowanego i traktowany jako układ przyczynowy może być niestabilny, co ma miejsce wtedy, gdy układ korygowany nie jest minimalnofazowy. W dziedzinie częstotliwości objawi się to występowaniem biegunów na zewnątrz koła jednostkowego[1]. Natomiast w dziedzinie czasu, ta niepożądana właściwość będzie objawiać się odpowiedzią impulsową nie spełniającą warunku absolutnej sumowalności, tzn. warunku stabilności w sensie BIBO. Wynika to również z faktu, że odwrotność układu stabilnego nie musi być stabilna na skutek bezwarunkowego pojawienia się pętli sprzężenia zwrotnego.

Jak zostanie pokazane w dalszej części pracy, istnieją rozwiązania umożliwiające syntezę stabilnych układów odwrotnych, które jednak nie należą do klasy układów przyczynowych. Dlatego w niniejszym rozdziale zostanie przedstawiona również klasyfikacja układów związana z podziałem na układy: przyczynowe, antyprzyczynowe i nieprzyczynowe.

[1]Przy rozpatrywaniu położenia biegunów lub zer układu na płaszczyźnie zespolonej zmiennej z świadomie używany jest zwrot „koło jednostkowe" zamiast „okrąg jednostkowy" ze względu na fakt, iż z geometrycznego punktu widzenia, rozpatrywanie położenia punktu wewnątrz lub na zewnątrz okręgu jest niepoprawne.

2.1. Synteza w dziedzinie czasu

Jak wiadomo, odpowiedź impulsowa w pełni opisuje właściwości dynamiczne każdego stacjonarnego (niezmiennego w czasie) układu liniowego, umożliwiając wyznaczenie odpowiedzi układu na dowolny sygnał wejściowy przez zastosowanie operacji splotu [20, 37]. Stąd jednym z możliwych sposobów syntezy filtru korekcyjnego dołączanego kaskadowo do układu korygowanego jest wyznaczenie odpowiedzi impulsowej jego odwrotności.

Jeśli układ korygowany scharakteryzowany jest dyskretną odpowiedzią impulsową $\{h_n\}$, to w celu uzyskania układu wypadkowego, który nie będzie wprowadzał zniekształceń do przetwarzanego sygnału, należy dobrać cyfrowy filtr korekcyjny o takiej dyskretnej odpowiedzi impulsowej $\{g_n\}$, aby w wyniku operacji splotu z odpowiedzią impulsową układu korygowanego otrzymać sygnał dyskretnego impulsu jednostkowego (delty Kroneckera). W dziedzinie sygnałów dyskretnych warunek ten przedstawia się matematycznie następującą zależnością

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} h_m g_{n-m} = \delta_n, \qquad n \in \mathbb{I} \tag{2.1}$$

gdzie δ_n oznacza n-próbkę delty Kroneckera, definiowanej jak poniżej

$$\delta_n = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad n = 0 \\ 0 & \text{dla} \quad n \neq 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

W dalszej części pracy filtr korekcyjny, którego odpowiedź impulsowa $\{g_n\}$ spełnia zależność (2.1), nazywany będzie ***idealnym filtrem korekcyjnym***[2].

Operacja wyznaczająca próbki sygnału $\{g_n\}$ przy znajomości sygnału $\{h_n\}$ i $\{\delta_n\}$ nazywana jest odsplataniem[3]. W przeciwieństwie do większości operacji, operacja odsplatania nie ma w dziedzinie czasu bezpośredniej definicji matematycznej[4]. Jest po prostu definiowana jako odwrotność operacji splotu [51]. Być może jest to związane z faktem, że w dziedzinie czasu próbki sygnału $\{g_n\}$ wyznaczane są sukcesywnie, co przedstawiono poniżej.

Przyjmując, że zarówno układ zniekształcający jak również filtr korekcyjny są scharakteryzowane przez przyczynowe odpowiedzi impulsowe, tj.

$$\forall_{n<0}\ h_n = 0 \qquad \text{oraz} \qquad \forall_{n<0}\ g_n = 0 \tag{2.3}$$

[2]Odpowiadająca jej zależność dla dziedziny częstotliwości zostanie przedstawiona w punkcie 2.2.

[3]W języku angielskim operacja ta nosi nazwę „deconvolution". Przeglądając literaturę autor nie znalazł powszechnie używanego polskiego odpowiednika tego słowa. Wydaje się jednak, że użycie właśnie tego słowa oddaje w pełni istotę opisywanej operacji.

[4]Jednak w dziedzinie częstotliwości przyjmuje formę ilorazu.

iloczyny występujące we wzorze (2.1) pod znakiem sumy przyjmują wartości zerowe dla $m < 0$ oraz $m > n$. Uwzględniając powyższy wniosek oraz wzór definicyjny (2.2) delty Kroneckera, zależność (2.1) może zostać zapisana w postaci

$$\sum_{m=0}^{n} h_m g_{n-m} = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad n = 0 \\ 0 & \text{dla} \quad n \neq 0 \end{cases} \tag{2.4}$$

Zgodnie z równaniem (2.4), dla indeksu $n = 0$ suma po lewej stronie powinna przyjąć wartość równą 1. Zatem można zapisać, że

$$h_0 g_0 = 1 \tag{2.5}$$

Stąd wartość próbki g_0 poszukiwanej odpowiedzi impulsowej filtru korekcyjnego można wyznaczyć ze wzoru

$$g_0 = \frac{1}{h_0} \tag{2.6}$$

Natomiast dla pozostałych próbek o indeksach $n > 0$, sumy iloczynów powinny być równe zero. Zatem równanie (2.4) przyjmie postać

$$\sum_{m=0}^{n} h_m g_{n-m} = 0 \tag{2.7}$$

Wyłączając spod znaku sumy czynnik o indeksie $m = 0$

$$h_0 g_n + \sum_{m=1}^{n} h_m g_{n-m} = 0 \tag{2.8}$$

otrzymuje się wzór pozwalający na obliczenie kolejnych próbek odpowiedzi impulsowej $\{g_n\}$

$$g_n = -\frac{1}{h_0} \sum_{m=1}^{n} h_m g_{n-m} \quad \text{dla} \quad n > 0 \tag{2.9}$$

Kilka kolejnych rozwinięć wzoru (2.9), dla początkowych indeksów n, przedstawiono poniżej.

$$\begin{aligned} g_0 &= \frac{1}{h_0} \\ g_1 &= -\frac{1}{h_0}\left(h_1 g_0\right) \\ g_2 &= -\frac{1}{h_0}\left(h_1 g_1 + h_2 g_0\right) \\ g_3 &= -\frac{1}{h_0}\left(h_1 g_2 + h_2 g_1 + h_3 g_0\right) \\ g_4 &= -\frac{1}{h_0}\left(h_1 g_3 + h_2 g_2 + h_3 g_1 + h_4 g_0\right) \end{aligned}$$

Wyznaczenie wartości próbki o indeksie n wymaga znajomości wartości próbek odpowiedzi impulsowej $\{g_n\}$ o wcześniejszych indeksach, dlatego obliczenia muszą być przeprowadzane systematycznie począwszy od próbki o indeksie 0, aż do próbki o pożądanym indeksie n.

Jeśli odpowiedź impulsowa $\{h_n\}$ układu korygowanego jest znormalizowana, tj. $h_0 = 1$, co nie wpływa na ogólność rozważań, wtedy przedstawione wzory ulegają nieznacznym uproszczeniom. Mianowicie wzór (2.6) dla $n = 0$ przyjmuje postać

$$g_0 = 1 \tag{2.10}$$

Natomiast przy wyprowadzaniu wzoru (2.9), spod znaku sumy wyłącza się nie tylko czynnik dla $m = 0$, lecz także dla $m = n$, ponieważ jest on przemnażany przez wartość jednostkową

$$h_0 g_n + h_n g_0 + \sum_{m=1}^{n-1} h_m g_{n-m} = 0 \tag{2.11}$$

otrzymując wzór na kolejne próbki g_n odpowiedzi impulsowej filtru korekcyjnego postaci

$$g_n = -h_n - \sum_{m=1}^{n-1} h_m g_{n-m} \quad \text{dla} \quad n > 0 \tag{2.12}$$

Kilka kolejnych rozwinięć wzoru (2.12) dla początkowych indeksów n przedstawiono poniżej.

$$\begin{aligned} g_0 &= 1 \\ g_1 &= -h_1 \\ g_2 &= -h_1 g_1 - h_2 \\ g_3 &= -h_1 g_2 - h_2 g_1 - h_3 \\ g_4 &= -h_1 g_3 - h_2 g_2 - h_3 g_1 - h_4 \end{aligned}$$

2.2. Synteza w dziedzinie częstotliwości

Nieco łatwiejsza pod względem matematycznym wydaje się synteza filtru korekcyjnego w dziedzinie częstotliwości. Oznaczmy przez $H(z)$ funkcję transmitancji przyczynowego układu zniekształcającego, natomiast przez $G(z)$ funkcję transmitancji filtru korekcyjnego połączonego kaskadowo z układem korygowanym. Uzyskanie wypadkowego układu tożsamościowego wymaga dołączenia filtru o takiej transmitancji $G(z)$, aby spełniona była zależność

$$H(z)G(z) = 1 \tag{2.13}$$

Zależność (2.13) określa wymaganie, jakie w dziedzinie częstotliwości powinien spełniać idealny filtr korekcyjny. Jest ono równoważne wymaganiu stawianemu w dziedzinie czasu określonemu przez zależność (2.1). Oznacza to, że filtr korekcyjny spełniający zależność (2.1), spełnia również zależność (2.13) i odwrotnie.

Przy danej transmitancji $H(z)$ układu korygowanego wyznaczenie transmitancji filtru korekcyjnego, jako idealnej odwrotności układu korygowanego, polega na rozwiązaniu równania (2.13) względem $G(z)$, tj.

$$G(z) = \frac{1}{H(z)} \tag{2.14}$$

Zakładając, że w ogólnym przypadku transmitancja $H(z)$ układu korygowanego jest funkcją wymierną

$$H(z) = \frac{l_0 + l_1 z^{-1} + l_2 z^{-2} + \ldots + l_K z^{-K}}{m_0 + m_1 z^{-1} + m_2 z^{-2} + \ldots + m_N z^{-N}} \tag{2.15}$$

to zgodnie z zależnością (2.14), transmitancja $G(z)$ idealnego filtru korekcyjnego ma postać

$$G(z) = \frac{m_0 + m_1 z^{-1} + m_2 z^{-2} + \ldots + m_N z^{-N}}{l_0 + l_1 z^{-1} + l_2 z^{-2} + \ldots + l_K z^{-K}} \tag{2.16}$$

Jak widać rozwiązanie uzyskiwane jest niejako natychmiast.

Można zauważyć, iż niezależnie od tego, czy układ korygowany jest opisany transmitancją $H(z)$ postaci wymiernej czy wielomianowej, transmitancja $G(z)$ uzyskanego filtru korekcyjnego będzie zawsze postaci wymiernej. Bezwarunkowe pojawienie się nietrywialnego mianownika w transmitancji filtru korekcyjnego jest jednoznaczne z występowaniem sprzężenia zwrotnego w strukturze filtru korekcyjnego, które może być przyczyną jego niestabilności. Ma to miejsce wtedy, gdy układ korygowany nie jest minimalnofazowy, czyli gdy co najmniej jedno zero transmitancji $H(z)$ opisanej wzorem (2.15) leży na zewnątrz koła jednostkowego. W takim przypadku uzyskany filtr korekcyjny, będący idealną odwrotnością układu korygowanego i traktowany jako układ przyczynowy, będzie niestabilny.

Rozwiązaniem proponowanym w takich przypadkach jest aproksymacja transmitancji $H(z)$ przez kaskadowe połączenie układu minimalnofazowego $H_{min}(z)$ oraz wszechprzepustowego $H_{ap}(z)$ [45].

$$H(z) = H_{min}(z) H_{ap}(z) \tag{2.17}$$

Transmitancja $H_{min}(z)$ układu minimalnofazowego jest tworzona na postawie zer i biegunów transmitancji $H(z)$ leżących wewnątrz koła jednostkowego oraz zer będących sprzężonymi odwrotnościami zer transmitancji $H(z)$ leżących na zewnątrz koła jednostkowego. Zera transmitancji $H(z)$ leżące na zewnątrz koła jednostkowego przyporządkowywane są jako zera

transmitancji układu wszechprzepustowego $H_{ap}(z)$. Natomiast bieguny transmitancji $H_{ap}(z)$ są sprzężonymi odwrotnościami tych zer. Transmitancja filtru korekcyjnego określana jest na podstawie zależności

$$G(z) = \frac{1}{H_{min}(z)} \tag{2.18}$$

dając stabilny i przyczynowy układ korekcyjny, jednak o niezerowej charakterystyce fazowej.

W wielu przypadkach, np. analiza sygnałów w medycynie, ważnym zagadnieniem jest korekcja zniekształceń fazowych, gdyż interesujący jest kształt sygnału. Również w przypadku pomiarów mocy, zniekształcenia fazowe mają duży wpływ na błąd pomiaru [17]. Przedstawiona powyżej metoda korekcji pozwala jedynie na pełną korekcję charakterystyki amplitudowej układu zniekształcającego. Wypadkowa charakterystyka fazowa układu zniekształcającego i korekcyjnego nie jest jednak zerowa lub co najmniej liniowa. Dlatego przy wykorzystywaniu tej metody i konieczności korekcji zniekształceń fazowych stosuje się dodatkowe filtry wszechprzepustowe, których zadaniem jest korekcja charakterystyki fazowej [7, 48]. Ewentualne dalsze rozpatrywanie rozkładu zer i biegunów zespołu uzyskanych filtrów korekcyjnych lub innych struktur przy ich implementacji dla konkretnego przypadku korekcji może prowadzić do obniżenia ich rzędów [23, 24].

2.3. Filtr korekcyjny jako układ nieprzyczynowy

W większości przypadków mamy do czynienia z układami przyczynowymi, co jest związane z faktem, iż otaczający nas świat ma charakter przyczynowy. Warto jednak przypomnieć o istnieniu szerszej klasy układów, obejmującej układy nieprzyczynowe. Cechą charakterystyczną tych układów jest nieprzyczynowa odpowiedź impulsowa oraz wyznaczanie aktualnej próbki sygnału wyjściowego nie tylko na podstawie jego próbek z „przeszłości", lecz także z „przyszłości". To przetwarzanie części sygnału z „przyszłości" uniemożliwia realizowanie układów należących do tej klasy jako układów analogowych. Ta niedogodność nie ma jednak znaczenia w przypadku układów dyskretnych, gdyż możliwa jest akwizycja skończonego ciągu próbek i przetwarzanie ich dopiero w następnej kolejności.

Rozwiązaniem zaistniałego problemu niestabilności idealnej odwrotności może być więc potraktowanie uzyskanego filtru korekcyjnego jako układu nieprzyczynowego. Dodatkowo rozkład jego transmitancji na sumę dwóch części, z których jedna będzie grupowała w sobie tylko bieguny leżące na zewnątrz koła jednostkowego tworząc układ antyprzyczynowy, druga zaś będzie zawierała tylko bieguny leżące wewnątrz koła jednostkowego tworząc układ przyczynowy,

doprowadzi do uzyskania układu o absolutnie sumowalnej odpowiedzi impulsowej. Zostanie więc spełniony warunek stabilności asymptotycznej. Zanim jednak zostanie to wykazane, w kolejnym punkcie krótko zostanie przypomniany opisu takich układów.

2.3.1. Układy nieprzyczynowe, przyczynowe i antyprzyczynowe

Układ, w którym reakcja następuje dopiero po wystąpieniu przyczyny określa się mianem ***układu przyczynowego***. Wszystkie układy analogowe należą do tej klasy układów. Bardzo często przy projektowaniu układów dyskretnych również zakłada się, że posiadają one właściwość przyczynowości, gdyż przeważnie symulują działanie układów analogowych. Formalną definicję układu przyczynowego przedstawiono poniżej [46].

Definicja 2.1. *Układ nazywamy przyczynowym, jeśli w każdej chwili czasowej wartość sygnału odpowiedzi układu zależy od teraźniejszej i wcześniejszych wartości sygnału wejściowego.*

Przeciwieństwem układu przyczynowego jest ***układ antyprzyczynowy***, który można zdefiniować jak poniżej.

Definicja 2.2. *Układ nazywamy antyprzyczynowym, jeśli w każdej chwili czasowej wartość sygnału odpowiedzi układu zależy tylko od przyszłych wartości sygnału wejściowego.*

Pomimo faktu, iż układy tej klasy nie występują w otaczającej nas rzeczywistości, która ma charakter przyczynowy, są one naturalnym uzupełnieniem klasy układów przyczynowych. Brak możliwości ich praktycznej realizacji w dziedzinie układów analogowych nie występuje w dziedzinie układów dyskretnych, gdzie próbki przetwarzanego sygnału mogą zostać zapamiętane i przetwarzane dopiero w następnej kolejności.

Układ charakteryzujący się jednocześnie właściwościami układu przyczynowego i antyprzyczynowego będzie określany mianem ***układu nieprzyczynowego***.

Rozpatrując liniowe układy stacjonarne, dla których zależność sygnału wyjściowego $\{y_n\}$ od sygnału wejściowego $\{x_n\}$ określona jest operacją splotu

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k i_{n-k}, \quad n \in \mathbb{I} \tag{2.19}$$

można podać warunki, jakie powinna spełniać odpowiedź impulsowa $\{i_n\}$ takiego układu, aby był on zaliczony do jednej z wymienionych powyżej klas.

Zgodnie z wcześniej podaną definicją, układ nazywamy przyczynowym, jeśli próbki sygnału wyjściowego $\{y_n\}$ nie zależą od przyszłych próbek sygnału wejściowego $\{x_n\}$, tj. od próbek x_k

o indeksach $k > n$ [46]. Warunek ten będzie spełniony tylko wtedy, gdy wartości próbek i_{n-k} odpowiedzi impulsowej $\{i_n\}$ będą zerowe dla $k > n$. Oznacza to, że odpowiedź impulsowa przyczynowego i stacjonarnego układu liniowego musi spełniać warunek

$$i_n = 0 \quad \text{dla} \quad n < 0 \tag{2.20}$$

Podobny warunek można określić dla układu antyprzyczynowego, dla którego próbki sygnału wyjściowego $\{y_n\}$ nie zależą od teraźniejszej i peszłychh próbek sygnału wejściowego $\{x_n\}$, tj. od próbek x_k o indeksach $k \leqslant n$. Ma to miejsce wtedy, gdy wartości próbek i_{n-k} odpowiedzi impulsowej $\{i_n\}$ będą zerowe dla $k \leqslant n$. Zatem odpowiedź antyprzyczynowego i stacjonarnego układu liniowego musi spełniać warunek

$$i_n = 0 \quad \text{dla} \quad n \geqslant 0 \tag{2.21}$$

Często do opisu sygnałów dyskretnych wykorzystywane jest przekształcenie $\mathcal{Z}$, gdzie nieprzyczynowy sygnał $\{f_n\}$ reprezentowany jest przez dwustronny szereg potęgowy Laurenta

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n z^{-n} \tag{2.22}$$

Szereg występujący we wzorze (2.22) można również przedstawić w postaci sumy dwóch szeregów

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} f_n z^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} f_n z^{-n} \tag{2.23}$$

Pierwszy z nich nazywany jest częścią osobliwą lub główną funkcji $F(z)$. Drugi określa się mianem części regularnej funkcji $F(z)$ [16, 35].

Z funkcją $F(z)$ określoną przez przekształcenie $\mathcal{Z}$ sygnału $\{f_n\}$ nierozerwalnie związany jest obszar zbieżności, który określa zbiór wartości zmiennej z, dla których ciąg $f_n z^{-n}$ jest bezwzględnie sumowalny [44]. Spowodowane jest to faktem istnienia różnych sygnałów dla których transformaty $\mathcal{Z}$ mają identyczną postać, różniąc się jednak właśnie obszarem zbieżności. Zatem podanie samej transformaty $\mathcal{Z}$ może prowadzić do niejednoznaczności [5].

Z teorii funkcji zespolonych wiadomo, że obszarem zbieżności funkcji $F(z)$ jest pierścień

$$r < |z| < R, \qquad \text{gdzie} \qquad r \geqslant 0, \quad R \leqslant \infty \tag{2.24}$$

W szczególności, obszarem zbieżności funkcji $F(z)$ opisanej wzorem (2.22) może być wnętrze koła o promieniu R, gdy funkcja $F(z)$ określona jest tylko częścią osobliwą szeregu Laurenta lub zewnętrzem koła o promieniu r, gdy funkcja $F(z)$ jest określona tylko częścią regularną szeregu Laurenta [35].

Ważnym pojęciem w teorii sygnałów jest pojęcie transmitancji. Główną tego przyczyną jest łatwość opisu i analizy układów przy jej wykorzystaniu [20]. Transmitancję układu można otrzymać przez wyznaczenie przekształcenia $\mathcal{Z}$ jego odpowiedzi impulsowej, tzn. jeśli sygnał $\{i_n\}$ reprezentuje odpowiedź impulsową układu, to

$$T(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i_n z^{-n} \tag{2.25}$$

jest jego transmitancją.

Odpowiedź impulsowa układu przyczynowego musi spełniać warunek (2.20), który po uwzględnieniu we wzorze (2.25) zawęża sumowanie do dodatnich wartości n

$$T(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} i_n z^{-n} \tag{2.26}$$

Podobnie jest w przypadku układu antyprzyczynowego, dla którego uwzględnienie warunku (2.21) prowadzi do zawężenia sumowanie do ujemnych indeksów n

$$T(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} i_n z^{-n} \tag{2.27}$$

Porównując wzory (2.26) i (2.27) z wzorem (2.23) można zauważyć, że część główna szeregu Laurenta opisuje układ antyprzyczynowy, natomiast część regularna układ przyczynowy.

Z punktu widzenia klasyfikacji układów na układy przyczynowe i antyprzyczynowe na podstawie obszaru zbieżności transmitancji ważne są dwa poniższe twierdzenia.

Twierdzenie 2.1. *Układ liniowy jest przyczynowy wtedy i tylko wtedy, gdy obszar zbieżności jego transmitancji leży na zewnątrz koła jednostkowego oraz $z = +\infty$ również należy do obszaru zbieżności.*

Dowód powyższego twierdzenia znajduje się w pracy [5]. W podobny sposób można sformułować i udowodnić analogiczne twierdzenie dla układów antyprzyczynowych.

Twierdzenie 2.2. *Układ liniowy jest antyprzyczynowy wtedy i tylko wtedy, gdy obszar zbieżności jego transmitancji leży wewnątrz koła jednostkowego oraz $z = 0$ również należy do obszaru zbieżności.*

Dowód. Jeżeli układ jest antyprzyczynowy, to jego transmitancja określona jest wzorem (2.27). Ponieważ wzór ten odpowiada części osobliwej szeregu Laurenta, jego obszarem zbieżności jest $|z| < R$.

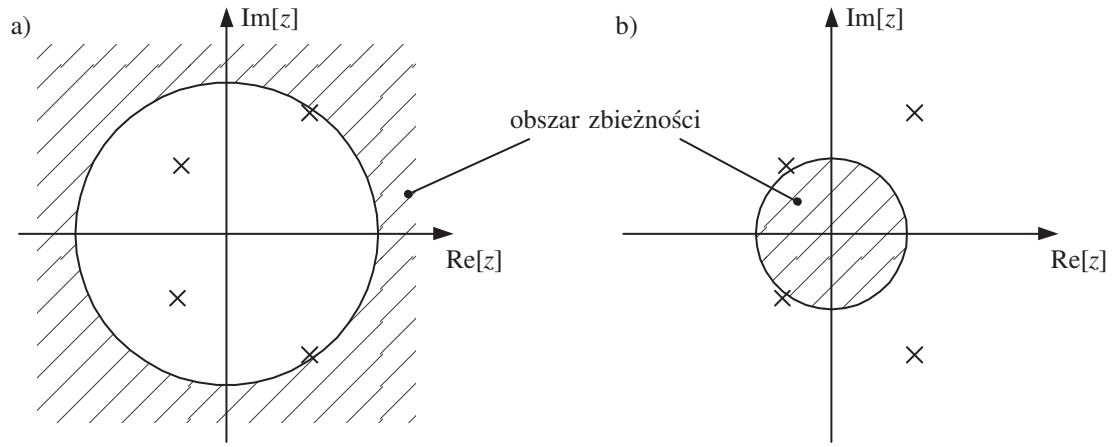
Udowadniając prawdziwość twierdzenia w przeciwnym kierunku zakłada się, że obszarem zbieżności transmitancji $T(z)$, którą można przedstawić w postaci dwóch szeregów

$$T(z) = T^{-}(z) + T^{+}(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} i_n z^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} i_n z^{-n}$$

odpowiednio o obszarach zbieżności $|z| < R$ i $|z| > r$ jest wnętrze koła, którego brzeg określa okrąg $|z| = R$. Z założenia wynika, że drugi z szeregów

$$T^{+}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} i_n z^{-n}$$

jest zbieżny na całej płaszczyźnie zespolonej, włącznie z $z = +\infty$. Jest więc funkcją całkowitą i ograniczoną. Zgodnie z twierdzeniem Liouville'a, funkcja taka jest stała [35]. Ponieważ $T^{+}(0) = 0$ i $T^{+}(z)$ jest stała, więc $T^{+}(z) = 0$. Wynika stąd, że $\forall_{n \geqslant 0}\ i_n = 0$, co kończy dowód. ■



Rys. 2.1. Przykładowe obszary zbieżności funkcji $T(z)$ transmitancji wymiernej, gdy opisany nią układ jest: a) przyczynowy, b) antyprzyczynowy

Bardzo często transmitancja $T(z)$ układu przedstawiana jest w postaci funkcji wymiernej, tzn. funkcji będącej stosunkiem wielomianów zmiennej z lub z^{-1}. Obszar zbieżności takich funkcji określany jest przez rozkład ich biegunów, gdyż transformata $\mathcal{Z}$ nie jest zbieżna w biegunie. W przypadku układów przyczynowych, dla których zgodnie z twierdzeniem 2.1 obszarem zbieżności jest zewnętrze koła, obszar ten jest ograniczony od środka przez okrąg, którego promień jest większy od największego modułu bieguna (rys. 2.1 a). Natomiast układy antyprzyczynowe opisane transmitancją wymierną posiadają obszar zbieżności ograniczony od zewnątrz okręgiem o promieniu mniejszym niż najmniejszy moduł bieguna, gdyż zgodnie z twierdzeniem 2.2, ich obszarem zbieżności jest wnętrze koła (rys. 2.1 b).

2.3.2. Stabilność układów nieprzyczynowych

Stabilność jest jedną z najważniejszych właściwości układów, często stanowiącą kryterium w procesie ich syntezy. Jak wiadomo, liniowy układ stacjonarny jest układem BIBO stabilnym, jeśli jego odpowiedź impulsowa $\{i_n\}$ jest absolutnie sumowalna [12, 20, 44, 46], tzn.

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |i_n| < \infty \tag{2.28}$$

Jak nadmieniono w punkcie 2.3, rozwiązaniem problemu niestabilności idealnej odwrotności układu korygowanego może być potraktowanie uzyskanego, przyczynowego filtru korekcyjnego posiadającego bieguny na zewnątrz koła jednostkowego jako układu nieprzyczynowego, gdyż zgodnie z poniższym twierdzeniem, można w ten sposób prawie zawsze uzyskać układ stabilny w sensie BIBO. Wyjątkiem jest przypadek występowania biegunów na okręgu jednostkowym, który zostanie rozpatrzony w dalszej części pracy.

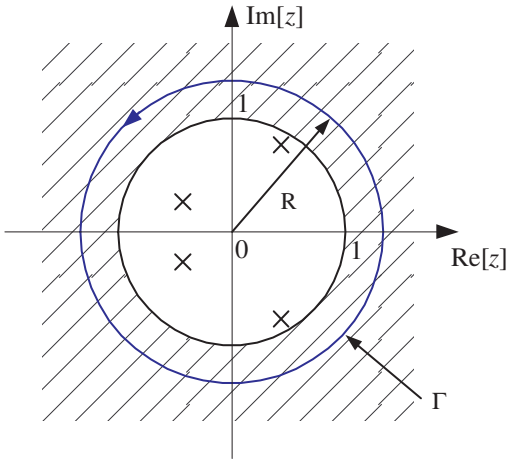
Twierdzenie 2.3. *Podział transmitancji układu nieprzyczynowego, który nie posiada biegunów leżących na okręgu jednostkowym, na sumę dwóch transmitancji, z których jedna grupuje bieguny leżące na zewnątrz koła jednostkowego z przypisanym obszarem zbieżności będącym jego brzegiem i wnętrzem, natomiast druga grupuje bieguny leżące wewnątrz koła jednostkowego i posiada przyporządkowany obszar zbieżności będący brzegiem i zewnątrzem koła jednostkowego, prowadzi do uzyskania układu stabilnego.*

Dowód. Załóżmy, że $T(z)$ jest wymierną transmitancją układu posiadającego bieguny p_k^+ o krotnościach σ_k^+, gdzie $k = 1, 2, 3, \ldots, P^+$ leżące wewnątrz koła jednostkowego oraz bieguny p_k^- o krotnościach σ_k^-, gdzie $k = 1, 2, 3, \ldots, P^-$ leżące na zewnątrz koła jednostkowego. Transmitancję tę można przedstawić w postaci

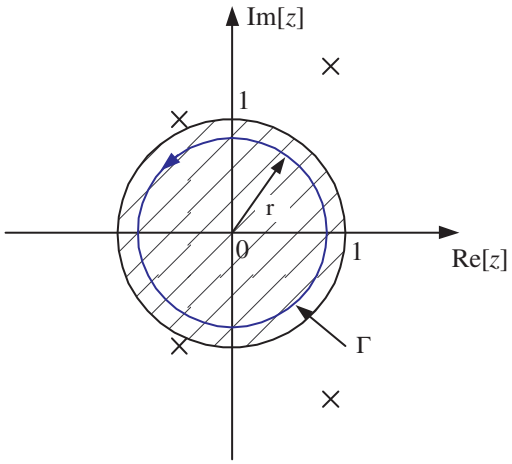
$$T(z) = T^+(z) + T^-(z) \tag{2.29}$$

gdzie $T^+(z)$ jest wymierną funkcją zmiennej z i grupującą bieguny p_k^+, natomiast $T^-(z)$ jest wymierną funkcją zmiennej z i grupującą bieguny p_k^-.

Rozpatrzmy najpierw funkcję $T^+(z)$ grupującą bieguny leżące wewnątrz koła jednostkowego. W granicznym przypadku, tj. gdy funkcja $T^+(z)$ posiada bieguny leżące bardzo blisko okręgu jednostkowego, jej obszarem zbieżności jest zewnętrze koła jednostkowego wraz z jego brzegiem. Z twierdzenia 2.1 wynika, że układ opisany funkcją transmitancji $T^+(z)$ z tak określonym obszarem zbieżności jest przyczynowy. Odpowiedź impulsowa układu przyczynowego



Rys. 2.2. Przykładowy rozkład biegunów transmitancji $T^+(z)$ i położenie konturu całkowania Γ



Rys. 2.3. Przykładowy rozkład biegunów transmitancji $T^-(z)$ i położenie konturu całkowania Γ

spełnia warunek (2.20). Zatem, aby dowieść, że układ ten spełnia warunek stabilności w sensie BIBO, który dla układu przyczynowego można zapisać w postaci

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |i_n^+| < \infty \tag{2.30}$$

wystarczy wykazać absolutną sumowalność próbek odpowiedzi impulsowej

$$i_n^+ = \frac{1}{2\pi j} \oint_\Gamma T^+(z) z^{n-1} dz \tag{2.31}$$

dla $n \geqslant 0$.

Kontur Γ, który w rozpatrywanym przypadku może być okręgiem o promieniu $R \geqslant 1$, jest krzywą całkowania leżącą w obszarze zbieżności transmitancji $T^+(z)$ (zakreskowany obszar

na rys. 2.2). Dla $n \geqslant 0$ kontur Γ obejmuje wszystkie bieguny funkcji podcałkowej. Stąd wartość całki we wzorze (2.31) można obliczyć jako sumę residuów funkcji podcałkowej w tych biegunach [62]. Dla biegunów jednokrotnych otrzymujemy

$$\begin{aligned} i_n^+ &= \sum_{k=1}^{P^+} \operatorname*{res}_{z=p_k^+} \left(T^+(z)z^{n-1}\right) = \sum_{k=1}^{P^+} \lim_{z\to p_k^+} \left(T^+(z)z^{n-1}\left(z-p_k^+\right)\right) = \\ &= \sum_{k=1}^{P^+} \left(p_k^+\right)^{n-1} \lim_{z\to p_k^+} \left(T^+(z)\left(z-p_k^+\right)\right) = \\ &= \sum_{k=1}^{P^+} \left(p_k^+\right)^{n-1} a\left(p_k^+\right) \end{aligned} \tag{2.32}$$

Analizując wzór (2.32) widać, że otrzymano ciąg wykładniczy, który jest absolutnie sumowalny dla $n \geqslant 0$, ponieważ $|p_k^+| < 1$, zaś $a(p_k^+)$ jest stałą niezależną od n. Analizę zbieżności dla biegunów wielokrotnych przedstawiono w dodatku B.1 .Widać zatem, że układ opisany transmitancją $T^+(z)$ z obszarem zbieżności będącym zewnętrzem koła jednostkowego wraz z jego brzegiem jest stabilny.

Podobnie można dowieść stabilności transmitancji $T^-(z)$, dla której obszarem zbieżności ze względu na przyporządkowany jej rozkład biegunów jest wnętrze koła jednostkowego wraz z brzegiem. Na podstawie twierdzenia 2.2 można wnioskować, że tak określony układ jest antyprzyczynowy. Odpowiedź impulsowa układu antyprzyczynowego spełnia warunek (2.21). Zatem aby dowieść, że układ ten spełnia warunek stabilności, który dla układu antyprzyczynowego można zapisać w postaci

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} |i_n^-| < \infty \tag{2.33}$$

wystarczy dowieść, że kolejne próbki odpowiedzi impulsowej

$$i_n^- = \frac{1}{2\pi j} \oint_{-\Gamma} T^-(z)z^{n-1}dz \tag{2.34}$$

dla $n < 0$ są absolutnie sumowalne. Kontur Γ, który musi leżeć w obszarze zbieżności funkcji podcałkowej (zakreskowany obszar na rys. 2.3), w rozpatrywanym przypadku może być okręgiem o promieniu $r \leqslant 1$.

Dla $n < 0$ funkcja podcałkowa może mieć dodatkowy biegun w zerze, którego krotność będzie zależała od n. Dlatego dla wygody dalszych analiz dokonajmy we wzorze (2.34) podstawienia

$$z = v^{-1} \tag{2.35}$$

W jego wyniku bieguny transmitancji $T^-(v^{-1})$ są symetrycznym odbiciem względem okręgu jednostkowego biegunów transmitancji $T^-(z)$, tzn. jeśli p_k^- jest biegunem $T^-(z)$, to $\frac{1}{p_k^-}$ jest

biegunem $T^-(v^{-1})$. Wynika stąd, że skoro transmitancja $T^-(z)$ posiada wszystkie bieguny na zewnątrz koła jednostkowego, to transmitancja $T^-(v^{-1})$ posiada wszystkie bieguny wewnątrz koła jednostkowego.

Różniczkując obustronnie wyrażenie (2.35)

$$dz = -v^{-2}dv \tag{2.36}$$

i stosując je do wzoru (2.34) otrzymujemy

$$\begin{aligned} i_n^- &= \frac{1}{2\pi j}\oint_\Gamma T^-(v^{-1})v^{-n+1}v^{-2}dv = \\ &= \frac{1}{2\pi j}\oint_\Gamma T^-(v^{-1})v^{-n-1}dv \end{aligned} \tag{2.37}$$

W wyniku zastosowanego podstawienia (2.35) obszarem zbieżności staje się zewnętrze koła jednostkowego, a kontur Γ musi być teraz okręgiem o promieniu $\frac{1}{r}$. Teraz dla $n < 0$ krzywa Γ obejmuje wszystkie bieguny funkcji podcałkowej we wzorze (2.37), zatem całkę można obliczyć jako sumę residuów w tych biegunach. Podobnie jak wcześniej, analiza wzoru (2.37) jest stosunkowo prosta dla biegunów jednokrotnych, gdyż wtedy otrzymujemy

$$\begin{aligned} i_n^- &= \sum_{k=1}^{P^-}\lim_{v\to\frac{1}{p_k^-}}\left(T^-(v^{-1})v^{-n-1}\left(v^{-1}-p_k^-\right)\right) = \\ &= \sum_{k=1}^{P^-}\left(\frac{1}{p_k^-}\right)^{-n-1}\lim_{v\to\frac{1}{p_k^-}}\left(T^-(v^{-1})\left(v^{-1}-p_k^-\right)\right) = \\ &= \sum_{k=1}^{P^-}\left(\frac{1}{p_k^-}\right)^{-n-1}a\left(\frac{1}{p_k^-}\right) \end{aligned} \tag{2.38}$$

Z zależności (2.38) widać, że otrzymany ciąg wykładniczy jest absolutnie sumowalny dla $n < 0$, ponieważ $|p_k^-| > 1$, a czynnik $a(1/p_k^-)$ jest stałą niezależną od n. Analzię absolutnej sumowalności odpowiedzi impulsowej $\{i_n^-\}$ dla rozpatrywanej transmitancji przy biegunach wielokrotnych przedstawiono w dodatku B.2. Z przeprowadzonych analiz można zatem wysunąć wniosek, że układ opisany transmitancją $T^-(z)$ z obszarem zbieżności będącym wnętrzem koła jednostkowego wraz z jego brzegiem jest stabilny, co kończy dowód. ■

Zatem, jeśli odpowiedź impulsowa nieprzyczynowego układu o transmitancji $T(z)$ posiadającego bieguny zarówno wewnątrz jak i na zewnątrz koła jednostkowego ma być absolutnie sumowalna (co zagwarantuje stabilność układu w sensie BIBO), to musi być ona sumą dwóch składowych: ***składowej przyczynowej*** i_n^+, która będzie wyznaczana w oparciu o transmitancję $T^+(z)$ grupującą bieguny leżące wewnątrz koła jednostkowego oraz ***składowej antyprzyczynowej*** i_n^-, wyznaczanej w oparciu o transmitancję $T^-(z)$ grupującą bieguny leżące

na zewnątrz koła jednostkowego.

$$i_n = i_n^+ + i_n^-, \qquad n \in \mathbb{I} \tag{2.39}$$

Składowe i_n^+ i i_n^- określone są odpowiednio przez wzory (2.40) i (2.41).

$$i_n^+ = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad n < 0 \\ \dfrac{1}{2\pi j} \oint_\Gamma T^+(z) z^{n-1} dz & \text{dla} \quad n \geqslant 0 \end{cases} \tag{2.40}$$

$$i_n^- = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi j} \oint_{-\Gamma} T^-(z) z^{n-1} dz & \text{dla} \quad n < 0 \\ 0 & \text{dla} \quad n \geqslant 0 \end{cases} \tag{2.41}$$

gdzie $\Gamma = \{z\colon |z| = 1\}$.

Przy takim podejściu cyfrowy filtr korekcyjny spełniający zależność (2.13) będzie zawsze BIBO stabilny za wyjątkiem przypadku, kiedy co najmniej jeden jego biegun będzie leżał na okręgu jednostkowym. W rozpatrywanym przypadku korekcji ma to miejsce wtedy, gdy układ zniekształcający posiada zera leżące na okręgu jednostkowym. Wtedy ciąg wykładniczy reprezentujący składową odpowiedzi impulsowej filtru korekcyjnego odpowiadającą takiemu biegunowi nie będzie zdążał do zera zarówno przy $n \to \infty$, jak rówież przy $n \to -\infty$. Zatem odpowiedź impulsowa nie będzie absolutnie sumowalna w sensie wyrażenia (2.28). Tym samym uzyskany filtr korekcyjny będzie niestabilny w sensie BIBO. Przyczyną niestabilności jest złe uwarunkowanie układu zniekształcającego, który posiada zera leżące na okręgu jednostkowym.

Jednym z podejść do zaistniałego problemu jest zastosowanie iteracyjnej metody filtracji odwrotnej [58], która jednak w przypadku konieczności uzyskiwania wyników „on-line" nie ma zastosowania. Drugim podejściem mogą być metody regularyzacyjne [40], gdzie poszukuje się filtru, którego właściwości jak najlepiej odwzorowywałyby właściwości idealnego filtru korekcyjnego określonego wzorem (2.1) lub (2.13), a jednocześnie będącego układem stabilnym asymptotycznie.

Złe uwarunkowanie w praktyce ma miejsce nie tylko wtedy, gdy jakieś zero transmitancji $H(z)$ znajduje się na okręgu jednostkowym ale także wówczas, gdy leży ono blisko niego. Zadaniem postępowania regularyzacyjnego może więc być również zapewnienie pewnego zapasu stabilności dla odwrotnego filtru korekcyjnego.

2.4. Teza

Biorąc pod uwagę przedstawione informacje, w niniejszej pracy podjęto się udowodnienia przedstawionej poniżej tezy.

Możliwa jest synteza stabilnego, dyskretnego układu korekcyjnego, który w połączeniu szeregowym z zadanym przyczynowym i źle uwarunkowanym układem zniekształcającym pozwala na korekcję wprowadzanych przez niego zniekształceń.

3. Synteza filtrów quasi-odwrotnych

Rozwiązanie zarysowanego problemu niestabilności[1] idealnego filtru korekcyjnego można przeprowadzić na drodze kompromisu poprzez zastosowanie innego filtru, który byłby stabilny, a jednocześnie w kaskadzie z układem zniekształcającym tworzyłby układ jak najbardziej zbliżony do układu tożsamościowego, prowadząc do powstania układu wypadkowego określonego mianem układu ***quasi-tożsamościowego***. Przy rozwiązywaniu tak postawionego problemu zdecydowano się na podejście optymalizacyjne uwzględniające dwa kryteria:

- aproksymacji układu tożsamościowego,
- stabilności filtru korekcyjnego,

poddając je następnie minimalizacji w celu określenia rozwiązania optymalnego.

3.1. Podstawy matematyczne

Matematyczne zadanie poszukiwania filtru korekcyjnego można postawić uniwersalnie za pomocą uogólnionej formuły algebraicznej, która będzie słuszna zarówno w dziedzinie czasu, jak i w dziedzinie częstotliwości. Dzięki temu możliwe będzie przeniesienie uzyskanego rozwiązania do jednej z wymienionych dziedzin, w zależności od potrzeb i stopnia trudności przekształceń wymaganych do uzyskania użytecznych wzorów lub interpretacji uzyskanych wyników. Dodatkowo zdefiniowanie przedstawionych powyżej kryteriów optymalizacyjnych z wykorzystaniem jednolitej formuły umożliwi ich wzajemne łączenie i jednoczesne przeprowadzanie na nich wymaganych operacji matematycznych.

[1] W sensie BIBO w odniesieniu do układów nieprzyczynowych.

3.1.1. Przestrzeń wektorowa sygnałów

Potraktujmy zatem ciąg próbek sygnału o wartościach rzeczywistych, jako wektor w wielowymiarowej przestrzeni U, tzn. sygnałowi $\{a_n\}$ będzie odpowiadał wektor kolumnowy[2]

$$\boldsymbol{a} = [\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots]^T \tag{3.1}$$

Zakłada się, że indeksy współczynników w wektorze mogą przyjmować wartości ujemne, gdyż w ogólnym przypadku wektor może reprezentować sygnał nieprzyczynowy. Współczynniki wektora o indeksach ujemnych będą reprezentować nieprzyczynowe próbki sygnału, natomiast współczynniki o indeksie 0 i indeksach dodatnich – próbki przyczynowe.

W praktyce zawsze dysponujemy jedynie skończonym zbiorem próbek sygnału, dlatego wektor będzie posiadał skończoną liczbę współczynników

$$\boldsymbol{a} = [a_{-n}, \ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots, a_n]^T \tag{3.2}$$

jak również przestrzeń U będzie miała skończony wymiar.

Ponieważ z założenia wektory te mogą reprezentować sygnały nieprzyczynowe, to w celu jednoznacznego określenia próbki o numerze 0 zakłada się, że sygnały reprezentowane są za pomocą wektorów o nieparzystej liczbie współrzędnych, gdzie środkowa współrzędna odpowiada próbce o numerze 0. Dzięki temu możliwe jest jednoznaczne opisanie dowolnego sygnału o próbkach rzeczywistych za pomocą wektora. Dla przykładu delta Kroneckera będzie miała postać $\boldsymbol{\delta} = [\underbrace{0, \ldots, 0}_{n \text{ zer}}, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n \text{ zer}}]^T$.

W przypadku, gdy sygnał posiada liczbę próbek o indeksach ujemnych różną od liczby próbek o indeksach dodatnich lub jest przyczynowy, należy dokonać uzupełnienia wektora zerami, gdyż wektory $[a_{-1}, a_0, a_1, a_2]^T$ i $[0, a_{-1}, a_0, a_1, a_2]^T$ reprezentują w rzeczywistości ten sam sygnał.

Określmy dla tych wektorów operacje dodawania i mnożenia przez elementy ciała, przyjętego jako zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$, w następujący sposób

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \quad \text{gdzie} \quad c_n = a_n + b_n, \quad n \in \mathbb{I} \tag{3.3}$$

$$\boldsymbol{c} = \alpha\boldsymbol{a}, \quad \text{gdzie} \quad c_n = \alpha a_n, \quad n \in \mathbb{I}, \alpha \in \mathbb{R} \tag{3.4}$$

gdzie a_n, b_n, c_n są współrzędnymi odpowiednio wektorów $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ i $\boldsymbol{c}$, natomiast α jest skalarem. Nie jest trudno udowodnić [21], że zbiór takich wektorów jest przestrzenią liniową nad ciałem

[2] T oznacza operację transponowania macierzy.

liczb rzeczywistych, gdyż operacje zdefiniowane wzorami (3.3) i (3.4) spełniają warunki

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} &= \boldsymbol{b}+\boldsymbol{a} && (3.5)\\
(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c} &= \boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) && (3.6)\\
\exists_{\mathbf{0}\in U}\ \boldsymbol{a}+\mathbf{0} &= \boldsymbol{a} && (3.7)\\
\forall_{\boldsymbol{a}\in U}\ \exists_{-\boldsymbol{a}\in U}\ \boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a}) &= \mathbf{0} && (3.8)\\
(\alpha\beta)\boldsymbol{a} &= \alpha(\beta\boldsymbol{a}) && (3.9)\\
(\alpha+\beta)\boldsymbol{a} &= \alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{a} && (3.10)\\
\alpha(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) &= \alpha\boldsymbol{a}+\alpha\boldsymbol{b} && (3.11)\\
1\boldsymbol{a} &= \boldsymbol{a} && (3.12)
\end{aligned}$$

dla każdego $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\in U$ i $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, gdzie 1 jest jedynką ciała liczb rzeczywistych oraz

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} &= [\ldots,0,0,0,\ldots]^T && (3.13)\\
-\boldsymbol{a} &= [\ldots,-a_{-1},-a_0,-a_1,\ldots]^T && (3.14)
\end{aligned}$$

są odpowiednio wektorami zerowym i przeciwnym. Tak określona przestrzeń liniowa będzie nazywana ***przestrzenią liniową sygnałów dyskretnych***.

W przestrzeni liniowej można zdefiniować iloczyn skalarny $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\in\mathbb{R}$, będący funkcją dwóch dowolnych wektorów $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ należących do danej przestrzeni. Funkcja ta przyporządkowując wspomnianej parze wektorów element z ciała liczb rzeczywistych musi spełniać poniższe warunki

$$\begin{aligned}
\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle &= \langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\rangle && (3.15)\\
\langle\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle &= \langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\rangle+\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle && (3.16)\\
\langle\alpha\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle &= \alpha\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle,\quad \alpha\in\mathbb{R} && (3.17)\\
\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\rangle &> 0 \quad \text{dla} \quad \boldsymbol{a}\neq\mathbf{0} && (3.18)\\
\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\rangle &= 0 \quad \text{dla} \quad \boldsymbol{a}=\mathbf{0} && (3.19)
\end{aligned}$$

W szczególności odwzorowanie $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\to\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\in\mathbb{R}$ określone jako suma iloczynów odpowiadających sobie próbek a_n i b_n sygnałów $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$

$$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_nb_n,\quad a_n,b_n\in\mathbb{R} \qquad (3.20)$$

spełnia aksjomaty (3.15) – (3.19) stanowiąc ***iloczyn skalarny sygnałów***. Jeśli obydwa argumenty zdefiniowanego iloczynu skalarnego sygnałów pokrywają się, to staje się on kwadratem

normy sygnału

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle = \|\boldsymbol{a}\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n|^2 \tag{3.21}$$

określając jego „energię"

W przetwarzaniu sygnałów przez liniowe układy stacjonarne bardzo ważną rolę pełni operacja splotu definiowana następującą zależnością

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} i_{n-k} x_k, \quad n, k \in \mathbb{I} \tag{3.22}$$

gdzie: i_n – n-ta próbka sygnału odpowiedzi impulsowej $\{i_n\}$ układu, $i_n \in \mathbb{R}$,
x_n – n-ta próbka sygnału wejściowego $\{x_n\}$, $x_n \in \mathbb{R}$,
y_n – n-ta próbka sygnału wyjściowego $\{y_n\}$, $y_n \in \mathbb{R}$.

Wzór (3.22) może być również zapisany w postaci macierzowej

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{I}\boldsymbol{x} \tag{3.23}$$

gdzie

$$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \iddots \\ \cdots & i_0 & i_{-1} & i_{-2} & i_{-3} & i_{-4} & i_{-5} & i_{-6} & \cdots \\ \cdots & i_1 & i_0 & i_{-1} & i_{-2} & i_{-3} & i_{-4} & i_{-5} & \cdots \\ \cdots & i_2 & i_1 & i_0 & i_{-1} & i_{-2} & i_{-3} & i_{-4} & \cdots \\ \cdots & i_3 & i_2 & i_1 & i_0 & i_{-1} & i_{-2} & i_{-3} & \cdots \\ \cdots & i_4 & i_3 & i_2 & i_1 & i_0 & i_{-1} & i_{-2} & \cdots \\ \cdots & i_5 & i_4 & i_3 & i_2 & i_1 & i_0 & i_{-1} & \cdots \\ \cdots & i_6 & i_5 & i_4 & i_3 & i_2 & i_1 & i_0 & \cdots \\ \iddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \tag{3.24}$$

$$\boldsymbol{x} = [\ldots, x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots]^T \tag{3.25}$$

$$\boldsymbol{y} = [\ldots, y_{-3}, y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots]^T \tag{3.26}$$

Jeśli przyjąć, że sygnały $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ oraz $\{i_n\}$ mają skończony czas trwania, to zarówno macierz $\boldsymbol{I}$ jak również wektory $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{y}$ przyjmują skończony wymiar.

Można zatem przyjąć, że w przestrzeni liniowej sygnałów operacji splotu odpowiada operator, określony mianem ***operatora splotu***, scharakteryzowany kwadratową macierzą Toepliza, w której na głównej przekątnej znajdują się wartości próbki o indeksie 0, poniżej niej

umieszczane są próbki przyczynowe, natomiast powyżej próbki antyprzyczynowe. Operator ten sygnałowi dyskretnemu $\{x_n\}$ reprezentowanemu przez wektor $\boldsymbol{x}$ przyporządkowuje wektor $\boldsymbol{y}$ reprezentujący dyskretny sygnał $\{y_n\}$. W przypadku, gdy odpowiedź impulsowa układu dyskretnego jest przyczynowa, macierz operatora splotu staje się macierzą dolną trójkątną. Dla układu tożsamościowego macierz operatora splotu jest macierzą jednostkową $\mathbf{1}$. Ze względu na poczynione wcześniej założenie związane z reprezentacją sygnałów nieprzyczynowych przez wektory, rozmiar macierzy operatora splotu jest zawsze liczbą nieparzystą.

Należy również zauważyć, że wynikiem działania operatora splotu reprezentującego układ dyskretny na wektor delty Kroneckera jest wektor próbek odpowiedzi impulsowej takiego układu

$$\boldsymbol{I\delta} = \boldsymbol{i} \tag{3.27}$$

Tak zdefiniowany operator splotu jest operatorem liniowym, gdyż dla dowolnych wektorów $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in U$ oraz $\alpha \in \mathbb{R}$ spełnia warunek jednorodności i addytywności, tj.

$$\boldsymbol{I}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{Ia} + \boldsymbol{Ib} \tag{3.28}$$

$$\boldsymbol{I}(\alpha\boldsymbol{a}) = \alpha\boldsymbol{Ia} \tag{3.29}$$

co wynika bezpośrednio z własności dodawania i mnożenia macierzy.

Zgodnie z definicją operator sprzężony do danego operatora liniowego musi dla dowolnych wektorów $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in U$ spełniać zależność [21]

$$\langle \boldsymbol{Ia}, \boldsymbol{b} \rangle = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{I}^*\boldsymbol{b} \rangle \tag{3.30}$$

gdzie: I – macierz operatora liniowego,

I^* – macierz liniowego operatora sprzężonego.

Nie jest trudno wykazać, że ***operator sprzężony do danego operatora splotu*** scharakteryzowany jest przez macierz będącą transpozycją macierzy operatora splotu, gdyż na podstawie (3.20) oraz własności transpozycji macierzy otrzymuje się

$$\langle \boldsymbol{Ia}, \boldsymbol{b} \rangle = (\boldsymbol{Ia})^T\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{I}^T\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}^T(\boldsymbol{I}^T\boldsymbol{b}) = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{I}^*\boldsymbol{b} \rangle \tag{3.31}$$

Stąd widać, że

$$\boldsymbol{I}^* = \boldsymbol{I}^T \tag{3.32}$$

Jeśli stworzymy macierz operatora sprzężonego do operatora scharakteryzowanego przykła-

dową macierzą (3.24)

$$\boldsymbol{I}^* = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \iddots \\ \cdots & i_0 & i_1 & i_2 & i_3 & i_4 & i_5 & i_6 & \cdots \\ \cdots & i_{-1} & i_0 & i_1 & i_2 & i_3 & i_4 & i_5 & \cdots \\ \cdots & i_{-2} & i_{-1} & i_0 & i_1 & i_2 & i_3 & i_4 & \cdots \\ \cdots & i_{-3} & i_{-2} & i_{-1} & i_0 & i_1 & i_2 & i_3 & \cdots \\ \cdots & i_{-4} & i_{-3} & i_{-2} & i_{-1} & i_0 & i_1 & i_2 & \cdots \\ \cdots & i_{-5} & i_{-4} & i_{-3} & i_{-2} & i_{-1} & i_0 & i_1 & \cdots \\ \cdots & i_{-6} & i_{-5} & i_{-4} & i_{-3} & i_{-2} & i_{-1} & i_0 & \cdots \\ \iddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \tag{3.33}$$

to można zauważyć, iż macierz ta powstaje na bazie odwróconego sygnału odpowiedzi impulsowej układu, który w niniejszym opracowaniu będzie oznaczany znakiem $^\sharp$, tzn.

$$\boldsymbol{a} = [\ldots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \ldots] \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{a}^\sharp = [\ldots, a_2, a_1, a_0, a_{-1}, a_{-2}, \ldots] \tag{3.34}$$

Operację odwrócenia współrzędnych wektora reprezentującego sygnał dyskretny nazwano ***inwersją czasową***.

Operacjom sumy i iloczynu operatorów splotu, jako operatorom liniowym, odpowiadają działania sumy i iloczynu macierzy reprezentujących te operatory. Podobnie operacji iloczynu operatora splotu przez skalar odpowiada operacja iloczynu macierzy tego operatora przez skalar [21].

Z punktu widzenia dalszej części pracy, ważne są trzy poniższe twierdzenia.

Twierdzenie 3.1. *Iloczyn macierzy $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ operatorów splotu jest równy sprzężeniu iloczynu macierzy $\boldsymbol{A}^*$ i $\boldsymbol{B}^*$ sprzężonych operatorów splotu, ale w odwrotnej kolejności, tj.*

$$\boldsymbol{AB} = (\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*)^* \tag{3.35}$$

Dowód powyższego twierdzenia wynika bezpośrednio z (3.32) oraz własności transpozycji macierzy.

Twierdzenie 3.2. *Inwersja czasowa iloczynu macierzy $\boldsymbol{A}$ operatora splotu i wektora $\boldsymbol{\delta}$ delty Kroneckera jest równa iloczynowi macierzy $\boldsymbol{A}^*$ operatora sprzężonego i wektora $\boldsymbol{\delta}$ delty Kroneckera, tj.*

$$(\boldsymbol{A\delta})^\sharp = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\delta} \tag{3.36}$$

Twierdzenie 3.3. *Iloczyn macierzy* $\boldsymbol{A}$ *operatora splotu i wektora* $\boldsymbol{b}$ *jest równy inwersji czasowej iloczynu macierzy* $\boldsymbol{A}^*$ *sprzężonego operatora splotu i inwersji czasowej wektora* $\boldsymbol{b}$*, tj.*

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{b} = \left(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{b}^\sharp\right)^\sharp \tag{3.37}$$

Dowody twierdzeń 3.2 oraz 3.3 znajdują się w dodatku B.

3.1.2. Przestrzeń wektorowa sygnałów a przekształcenie $\mathcal{Z}$

Poprzedni rozdział daje obraz powiązania przestrzeni wektorowej sygnałów z reprezentacją sygnałów w dziedzinie czasu. Zaprezentowany sposób opisu sygnałów i układów można również powiązać z przekształceniem $\mathcal{Z}$.

W przekształceniu $\mathcal{Z}$ dowolny sygnał dyskretny $\{a_n\}$ reprezentowany jest przez funkcję zmiennej zespolonej z według poniższej zależności

$$\{a_n\} \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} A(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^{-n} \tag{3.38}$$

W poprzednim punkcie przyjęto reprezentację sygnałów dyskretnych jako wektora kolumnowego zgodnie ze wzorem (3.1). Zatem można przyjąć, że

$$A(z) \leftrightarrow \boldsymbol{a} \tag{3.39}$$

Operacji splotu dwóch sygnałów w dziedzinie czasu odpowiada operacja mnożenia transformat $\mathcal{Z}$ tych sygnałów, tj.

$$\{a_n\} * \{b_n\} \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} A(z)B(z) \tag{3.40}$$

W przestrzeni liniowej splotowi odpowiada operator splotu, którego macierz tworzona jest na podstawie wektora reprezentującego jeden z sygnałów. Stąd można napisać, że

$$A(z)B(z) \leftrightarrow \boldsymbol{A}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{a} \tag{3.41}$$

Macierz sprzężonego operatora splotu tworzona jest na podstawie sygnału po inwersji czasowej. Jeśli sygnał $\{a_n\}$ scharakteryzowany wektorem $\boldsymbol{a}$ posiada transformatę $A(z)$, to sygnał scharakteryzowany wektorem $\boldsymbol{a}^\sharp$ posiada transformatę $A(z^{-1})$, co wynika bezpośrednio z własności przekształcenia $\mathcal{Z}$ [46]

$$\{a_n\} \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} A(z) \quad \Rightarrow \quad \{a_{-n}\} \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} A(z^{-1}) \tag{3.42}$$

Zatem

$$A(z^{-1})B(z) \leftrightarrow \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{b} \tag{3.43}$$

Zgodnie z równością Parsevala całkowita energia E sygnału może zostać określona zarówno na podstawie znajomości próbek a_n sygnału $\{a_n\}$ w dziedzinie czasu, jak również przy znajomości jego widma $A(e^{j\omega})$ lub transformaty $\mathcal{Z}$ $A(z)$ [34]

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |A(e^{j\omega})|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} |A(z)|^2 z^{-1} dz \tag{3.44}$$

Stąd widać, że kwadrat normy sygnału określony przez (3.21) ma swoją reprezentację nie tylko w dziedzinie czasu lecz również w dziedzinie częstotliwości oraz dziedzinie przekształcenia $\mathcal{Z}$.

3.1.3. Definicje kryteriów optymalizacyjnych

Posługując się reprezentacją energii sygnału zapisanej z wykorzystaniem iloczynu skalarnego sygnałów, do określenia kryterium stabilności układu przyjęto tzw. ***stabilność energetyczną***.

Definicja 3.1. *Układ nazywamy stabilnym w sensie energetycznym, jeżeli przy doprowadzonym sygnale wejściowym $\{x_n\}$ o skończonej energii, tj.*

$$\|\boldsymbol{x}\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x_n|^2 < \infty \tag{3.45}$$

sygnał wyjściowy $\{y_n\}$ z rozpatrywanego układu posiada również skończoną energię

$$\|\boldsymbol{y}\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |y_n|^2 < \infty \tag{3.46}$$

Przyjmując, że sygnał wejściowy $\{x_n\}$ jest deltą Kroneckera, to sygnał wyjściowy $\{y_n\}$ jest odpowiedzią impulsową $\{i_n\}$ układu. Przy takim założeniu sygnał wejściowy ma ograniczoną energię spełniając zależność (3.45). Zatem, aby rozpatrywany układ był energetycznie stabilny, musi istnieć taka dodatnia liczba q, że

$$\|\boldsymbol{i}\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |i_n|^2 \leqslant q \tag{3.47}$$

Sygnał odpowiedzi impulsowej zostanie więc wykorzystany do zdefiniowania ***wskaźnika stabilności*** filtru korekcyjnego, który będzie jednym z dwóch kryteriów optymalizacyjnych.

Definicja 3.2. *Wskaźnikiem stabilności układu w sensie energetycznym jest wartość q energii odpowiedzi impulsowej $\{i_n\}$*

$$\langle \boldsymbol{i}, \boldsymbol{i} \rangle = \|\boldsymbol{i}\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |i_n|^2 = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} |I(z)|^2 z^{-1} dz = q \tag{3.48}$$

Zdefiniowany wskaźnik umożliwi w procedurze minimalizacyjnej porównywanie filtrów korekcyjnych w celu wyboru optymalnego rozwiązania pod względem stabilności, gdyż im mniejsza jest jego wartość, tym filtr korekcyjny jest bardziej stabilny.

W najlepszym przypadku dołączenie filtru korekcyjnego powinno stworzyć układ wypadkowy będący układem tożsamościowym, którego odpowiedzią impulsową jest delta Kroneckera. Wyznaczając energię różnicy sygnału odpowiedzi impulsowej uzyskanego układu wypadkowego i delty Kroneckera można określić wartość energii, która została rozproszona przez układ zniekształcający i nie skompensowana przez zastosowany filtr korekcyjny. Jej wartość określa jednocześnie jakość aproksymacji, tj. na ile kaskadowe połączenie filtru korekcyjnego i układu korygowanego przybliża układ tożsamościowy. Im mniejsza jest to wartość, tym układ wypadkowy oddaje wierniej układ tożsamościowy. Wykorzystując więc ponownie metrykę przestrzeni sygnałów zdefiniowano ***wskaźnik aproksymacji***, będący drugim kryterium optymalizacyjnym.

Definicja 3.3. *Wskaźnikiem aproksymacji układu tożsamościowego przez układ wypadkowy, powstały w wyniku kaskadowego połączenia układu korygowanego i filtru korekcyjnego, nazywamy energię różnicy sygnału $\{y_n\}$ odpowiedzi impulsowej na wyjściu wspomnianej kaskady układów i delty Kroneckera $\{\delta_n\}$.*

$$\langle \boldsymbol{y}-\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{y}-\boldsymbol{\delta}\rangle = \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\delta}\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}(y_n-\delta_n)^2 = \frac{1}{2\pi j}\oint_{|z|=1}|Y(z)-1|^2 z^{-1}dz \tag{3.49}$$

gdzie: $\boldsymbol{y}$ *– wektor reprezentujący sygnał odpowiedzi impulsowej układu wypadkowego,*
$\boldsymbol{\delta}$ *– wektor reprezentujący deltę Kroneckera.*

Zdefiniowane powyżej wskaźniki stabilności i stopnia aproksymacji przy wykorzystaniu kwadratu normy sygnału mają swoją reprezentację zarówno w dziedzinie czasu, jak również dziedzinie częstotliwości oraz w formie przekształcenia $\mathcal{Z}$, co wynika z równości Parsevala. Takie podejście umożliwia posługiwanie się uogólnionym zapisem, gdzie oznaczenia $\boldsymbol{h}$ i $\boldsymbol{g}$ mogą być interpretowane zarówno jako transmitancje $H(z)$ i $G(z)$ odpowiednio układu korygowanego i filtru korekcyjnego, jak również jako sygnały $\{h_n\}$ i $\{g_n\}$ ich odpowiedzi impulsowych.

3.2. Określenie zadań optymalizacyjnych

Niech $\boldsymbol{h}$ i $\boldsymbol{g}$ reprezentują wektory odpowiedzi impulsowych odpowiednio układu zniekształcającego i filtru korekcyjnego. Zgodnie z przedstawionymi rozważaniami, liniowy i stacjonarny

układ dyskretny może być reprezentowany przez operator splotu o macierzy tworzonej na bazie wektora odpowiedzi impulsowej tego układu. Rozpatrując przyjętą strukturę połączenia układu zniekształcającego i korekcyjnego, odpowiedź impulsowa układu wypadkowego może być wyznaczona na podstawie zależności

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{H}\boldsymbol{\delta}) = \boldsymbol{G}\boldsymbol{H}\boldsymbol{\delta} \tag{3.50}$$

Bazując na twierdzeniach 3.1 i 3.2, zależność (3.50) można przekształcić do postaci

$$\boldsymbol{y} = \left(\boldsymbol{H}^{*}\boldsymbol{G}^{*}\right)^{*}\boldsymbol{\delta} = \left(\boldsymbol{H}^{*}\boldsymbol{G}^{*}\boldsymbol{\delta}\right)^{\sharp} \tag{3.51}$$

Wiedząc, że

$$\boldsymbol{G}^{*}\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{g}^{\sharp} \tag{3.52}$$

oraz wykorzystując twierdzenie 3.3, zależność (3.51) reprezentująca wypadkową odpowiedź impulsową kaskadowego połączenia układu zniekształcającego i korekcyjnego przyjmie postać

$$\boldsymbol{y} = \left(\boldsymbol{H}^{*}\boldsymbol{g}^{\sharp}\right)^{\sharp} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{g} \tag{3.53}$$

W sytuacji, gdy idealna odwrotność układu korygowanego jest niestabilna proponuje się zastosowanie procedury, która polega na poszukiwaniu minimalnej wartości współczynnika jednego z dwóch wymagań stawianych poszukiwanemu filtrowi korekcyjnemu, przy jednoczesnym postawieniu ograniczenia z wykorzystaniem drugiego wymagania. W teorii programowania nieliniowego, zadanie to znane jest pod nazwą minimalizacji z ograniczeniami [36, 61] i w ogólnym przypadku ma postać

$$\begin{aligned} \text{minimalizować funkcję} \quad & f(\boldsymbol{x}) \\ \text{względem} \quad & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n} \\ \text{przy ograniczeniach} \quad & c(\boldsymbol{x}) = q, \quad q \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Proponowaną procedurę można zrealizować na dwa sposoby[3].

1. Poszukuje się filtru korekcyjnego, który w połączeniu kaskadowym z układem zniekształcającym najlepiej aproksymuje układ tożsamościowy

$$f_{1}(\boldsymbol{g}) = \langle \boldsymbol{H}\boldsymbol{g} - \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{H}\boldsymbol{g} - \boldsymbol{\delta} \rangle \rightarrow \min \tag{3.54}$$

[3]Dla rozróżnienia oznaczeń funkcji i stałych przypisanych danemu zadaniu optymalizacyjnemu, zastosowano indeksowanie dolne.

przy założonym ograniczeniu

$$c_1(\boldsymbol{g}) = \langle \boldsymbol{g}, \boldsymbol{g} \rangle = q_1, \qquad q_1 \in \mathbb{R} \ \wedge \ q_1 > 0 \tag{3.55}$$

które oznacza, że wskaźnik stabilności filtru korekcyjnego musi przyjąć założoną wartość q_1.

2. Poszukuje się filtru korekcyjnego o minimalnym wskaźniku stabilności

$$f_2(\boldsymbol{g}) = \langle \boldsymbol{g}, \boldsymbol{g} \rangle \rightarrow \min \tag{3.56}$$

przy założonym ograniczeniu

$$c_2(\boldsymbol{g}) = \langle \boldsymbol{H}\boldsymbol{g} - \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{H}\boldsymbol{g} - \boldsymbol{\delta} \rangle = q_2, \qquad q_2 \in \mathbb{R} \ \wedge \ q_2 > 0 \tag{3.57}$$

oznaczającym, że wskaźnik aproksymacji układu wypadkowego powstałego na skutek kaskadowego połączenia układu zniekształcającego i filtru korekcyjnego musi przyjąć założoną wartość q_2.

Przedstawione powyżej założenia będą nazywane dalej odpowiednio: ***pierwszym*** i ***drugim zadaniem optymalizacyjnym***.

Jeśli przyjrzeć się określonym powyżej zadaniom optymalizacyjnym, to bardziej intuicyjne jest zakładanie poziomu aproksymacji układu tożsamościowego zastosowane w drugim zadaniu optymalizacyjnym i poszukiwanie filtru korekcyjnego, którego właściwości pozwalałyby na osiągnięcie jak najlepszej stabilności, niż zakładanie wskaźnika stabilności. Jednak w celu pełnego rozpatrzenia problemu zdecydowano się na rozważenie również i tego przypadku. Jak się okaże, pomimo wydawałoby się tak różnych warunków minimalizacyjnych i ograniczających w obu przedstawionych zadaniach, uzyskane w dalszej części pracy rozwiązania są do siebie podobne.

3.3. Rozwiązanie zadań optymalizacyjnych – filtry quasi-odwrotne

Rozwiązanie przedstawionych w punkcie 3.2 zadań, jako zadań optymalizacji warunkowej, można przeprowadzić przy wykorzystaniu metody mnożników Lagrange'a.

3.3.1. Pierwsze zadanie optymalizacyjne

Wykorzystując wspomnianą metodę, na podstawie (3.55) i (3.54) tworzy się tzw. funkcjonał Lagrange'a postaci

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1(\boldsymbol{g},\lambda) &= f_1(\boldsymbol{g}) + \lambda\left(c_1(\boldsymbol{g}) - q_1\right) = \\ &= \langle \boldsymbol{H}\boldsymbol{g} - \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{H}\boldsymbol{g} - \boldsymbol{\delta}\rangle + \lambda(\langle \boldsymbol{g},\boldsymbol{g}\rangle - q_1) \end{aligned} \tag{3.58}$$

gdzie $\lambda \in \mathbb{R}$ jest zmienną zwaną nieoznaczonym czynnikiem Lagrange'a lub mnożnikiem Lagrange'a.

Poszukiwanie minimum tak stworzonego funkcjonału przeprowadzono metodą gradientową. Przy ustalonej wartości mnożnika λ, funkcjonał (3.58) osiągnie minimum dla $\boldsymbol{g}_\lambda$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej zmiany $\boldsymbol{\Delta}_g$ wektora $\boldsymbol{g}_\lambda$ spełniona jest nierówność

$$\mathcal{L}_1(\boldsymbol{g}_\lambda + \boldsymbol{\Delta}_g, \lambda) - \mathcal{L}_1(\boldsymbol{g}_\lambda, \lambda) > 0 \tag{3.59}$$

Zapiszmy funkcjonały wchodzące w skład różnicy po lewej stronie nierówności (3.59) w rozwiniętej formie, tj.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1(\boldsymbol{g}_\lambda + \boldsymbol{\Delta}_g, \lambda) &= \langle \boldsymbol{H}(\boldsymbol{g}_\lambda + \boldsymbol{\Delta}_g) - \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{H}(\boldsymbol{g}_\lambda + \boldsymbol{\Delta}_g) - \boldsymbol{\delta}\rangle + \\ &\quad +\lambda(\langle \boldsymbol{g}_\lambda + \boldsymbol{\Delta}_g, \boldsymbol{g}_\lambda + \boldsymbol{\Delta}_g\rangle - q_1) \qquad (3.60) \\ \mathcal{L}_1(\boldsymbol{x}_\lambda, \lambda) &= \langle \boldsymbol{H}\boldsymbol{g}_\lambda - \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{H}\boldsymbol{g}_\lambda - \boldsymbol{\delta}\rangle + \lambda(\langle \boldsymbol{g}_\lambda, \boldsymbol{g}_\lambda\rangle - q_1) \qquad (3.61)\end{aligned}$$

Wykorzystując aksjomaty iloczynu skalarnego sygnałów oraz własności operatora splotu wspomnianą różnicę można, za pomocą przekształceń przedstawionych w dodatku A.1, zapisać w innej – równoważnej formie.

$$\mathcal{L}_1(\boldsymbol{g}_\lambda + \boldsymbol{\Delta}_g, \lambda) - \mathcal{L}_1(\boldsymbol{g}_\lambda, \lambda) = 2\langle \boldsymbol{H}^*\boldsymbol{H}\boldsymbol{g}_\lambda - \boldsymbol{H}^*\boldsymbol{\delta} + \lambda\boldsymbol{g}_\lambda, \boldsymbol{\Delta}_g\rangle + \|\boldsymbol{H}\boldsymbol{\Delta}_g\|^2 + \lambda\|\boldsymbol{\Delta}_g\|^2 \tag{3.62}$$

Podstawiając otrzymane wyrażenie (3.62) do nierówności (3.59) otrzymujemy jej nową formę

$$2\langle \boldsymbol{H}^*\boldsymbol{H}\boldsymbol{g}_\lambda - \boldsymbol{H}^*\boldsymbol{\delta} + \lambda\boldsymbol{g}_\lambda, \boldsymbol{\Delta}_g\rangle + \|\boldsymbol{H}\boldsymbol{\Delta}_g\|^2 + \lambda\|\boldsymbol{\Delta}_g\|^2 > 0 \tag{3.63}$$

Warunek (3.63) spełniony jest przy dowolnej zmianie $\boldsymbol{\Delta}_g$ wtedy i tylko wtedy, gdy zeruje się pierwszy składnik wyrażenia, tj. iloczyn skalarny $\langle \boldsymbol{H}^*\boldsymbol{H}\boldsymbol{g}_\lambda - \boldsymbol{H}^*\boldsymbol{\delta} + \lambda\boldsymbol{g}_\lambda, \boldsymbol{\Delta}_g\rangle$. Składnik ten musi zniknąć, gdyż ze względu na liniową zależność od $\boldsymbol{\Delta}_g$ nie utrzymuje stałego znaku podczas zmian $\boldsymbol{\Delta}_g$, przez co nierówność (3.63) nie może być spełniona dla dowolnej wartości $\boldsymbol{\Delta}_g$. Tylko iloczyn skalarny wektora zerowego z dowolnym, niezerowym wektorem $\boldsymbol{\Delta}_g$ doprowadzi do

zerowania się pierwszego składnika wyrażenia (3.63). Dlatego warunkiem koniecznym istnienia minimum jest zerowanie się wektora $\boldsymbol{H}^*\boldsymbol{H}\boldsymbol{g}_\lambda - \boldsymbol{H}^*\boldsymbol{\delta} + \lambda\boldsymbol{g}_\lambda$.

Także przy $\lambda < 0$ lewa strona wyrażenia (3.63) nie utrzymuje stałego znaku dla dowolnej wartości $\boldsymbol{\Delta}_g$. Zatem warunkiem koniecznym i wystarczającym istnienia minimum wyrażenia (3.58) jest spełnienie poniższych kryteriów

$$\boldsymbol{H}^*\boldsymbol{H}\boldsymbol{g}_\lambda - \boldsymbol{H}^*\boldsymbol{\delta} + \lambda\boldsymbol{g}_\lambda = 0 \qquad \text{oraz} \qquad \lambda \geqslant 0 \tag{3.64}$$

Rozwiązując pierwszy z warunków (3.64) względem $\boldsymbol{g}_\lambda$, uzyskuje się poszukiwany filtr, jako funkcję parametryczną mnożnika λ

$$\boldsymbol{g}_\lambda = (\lambda\mathbf{1} + \boldsymbol{H}^*\boldsymbol{H})^{-1}\boldsymbol{H}^*\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{H}^*(\lambda\mathbf{1} + \boldsymbol{H}^*\boldsymbol{H})^{-1}\boldsymbol{\delta} \tag{3.65}$$

Ze względu na przemienność mnożenia operatorów splotu, rozwiązanie (3.65) można również przedstawić w postaci ułamka operatorowego

$$\boldsymbol{g}_\lambda = \frac{\boldsymbol{H}^*}{\lambda\mathbf{1} + \boldsymbol{H}^*\boldsymbol{H}}\,\boldsymbol{\delta} \tag{3.66}$$

Uzyskane rozwiązanie $\boldsymbol{g}_\lambda$ określa rodzinę filtrów, nazwaną ***λ-rodziną filtrów quasi-odwrotnych***.

Na podstawie (3.66) i zdefiniowanego wskaźnika stabilności (3.48) utworzono funkcję $S_1(\lambda)$,

$$S_1(\lambda) = \langle \boldsymbol{g}_\lambda, \boldsymbol{g}_\lambda \rangle = \left\langle \frac{\boldsymbol{H}^*}{\lambda\mathbf{1} + \boldsymbol{H}^*\boldsymbol{H}}\,\boldsymbol{\delta}, \frac{\boldsymbol{H}^*}{\lambda\mathbf{1} + \boldsymbol{H}^*\boldsymbol{H}}\,\boldsymbol{\delta} \right\rangle \tag{3.67}$$

nazywaną dalej ***funkcją stabilności***. Podobnie wykorzystując wskaźnik aproksymacji (3.49), utworzono funkcję $A_1(\lambda)$

$$A_1(\lambda) = \langle \boldsymbol{H}\boldsymbol{g}_\lambda - \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{H}\boldsymbol{g}_\lambda - \boldsymbol{\delta} \rangle = \left\langle \frac{\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^*}{\lambda\mathbf{1} + \boldsymbol{H}^*\boldsymbol{H}}\,\boldsymbol{\delta} - \boldsymbol{\delta}, \frac{\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^*}{\lambda\mathbf{1} + \boldsymbol{H}^*\boldsymbol{H}}\,\boldsymbol{\delta} - \boldsymbol{\delta} \right\rangle \tag{3.68}$$

nazwaną ***funkcją aproksymacji***.

Zgodnie z ograniczeniem (3.55) wskaźnik stabilności dla poszukiwanego filtru powinien przyjąć założoną wartość q_1. Rozwiązanie, które spełnia to założenie ograniczające uzyskuje się dla takiej wartości mnożnika λ, dla której spełniona jest zależność

$$S_1(\lambda) = q_1 \tag{3.69}$$

Dlatego dopiero rozwiązanie równania (3.69) ze względu na λ prowadzi do wyboru z całej λ-rodziny filtrów quasi-odwrotnych opisanych zależnością (3.65) konkretnego rozwiązania optymalnego opisującego stabilny filtr quasi-odwrotny spełniający założone wymagania.

3.3.2. Drugie zadanie optymalizacyjne

Przy rozwiązywaniu drugiego zadania optymalizacyjnego zastosowano taką samą procedurę, jak dla pierwszego. Utworzono zatem funkcjonał Lagrange'a postaci

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2(\boldsymbol{g},\lambda) &= f_2(\boldsymbol{g}) + \lambda\left(c_2(\boldsymbol{g}) - q_2\right) = \\ &= \langle \boldsymbol{g},\boldsymbol{g}\rangle + \lambda(\langle \boldsymbol{H}\boldsymbol{g}-\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{H}\boldsymbol{g}-\boldsymbol{\delta}\rangle - q_2), \qquad \lambda\in\mathbb{R}\end{aligned} \tag{3.70}$$

w celu jednoczesnego uwzględnienia warunków (3.57) oraz (3.56). Funkcjonał (3.70) osiąga minimum dla $\boldsymbol{g}_\lambda$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych zmian $\boldsymbol{\Delta}_g$ wektora $\boldsymbol{g}_\lambda$ spełniona jest nierówność

$$\mathcal{L}_2(\boldsymbol{g}_\lambda + \boldsymbol{\Delta}_g, \lambda) - \mathcal{L}_2(\boldsymbol{g}_\lambda,\lambda) > 0 \tag{3.71}$$

Zapisując funkcjonały wchodzące w skład różnicy po lewej stronie nierówności (3.71) w rozwiniętej formie

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2(\boldsymbol{g}_\lambda+\boldsymbol{\Delta}_g,\lambda) &= \langle \boldsymbol{g}_\lambda+\boldsymbol{\Delta}_g, \boldsymbol{g}_\lambda+\boldsymbol{\Delta}_g\rangle + \\ &\quad +\lambda(\langle \boldsymbol{H}(\boldsymbol{g}_\lambda+\boldsymbol{\Delta}_g)-\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{H}(\boldsymbol{g}_\lambda+\boldsymbol{\Delta}_g)-\boldsymbol{\delta}\rangle \qquad (3.72)\\ \mathcal{L}_2(\boldsymbol{g}_\lambda,\lambda) &= \langle \boldsymbol{g}_\lambda,\boldsymbol{g}_\lambda\rangle + \lambda(\langle \boldsymbol{H}\boldsymbol{g}_\lambda-\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{H}\boldsymbol{g}_\lambda-\boldsymbol{\delta}\rangle - q_2) \qquad (3.73)\end{aligned}$$

doprowadza się wspomnianą różnicę do następującej postaci

$$\mathcal{L}_2(\boldsymbol{g}_\lambda+\boldsymbol{\Delta}_g,\lambda) - \mathcal{L}_2(\boldsymbol{g}_\lambda,\lambda) = 2\langle \boldsymbol{g}_\lambda + \lambda\boldsymbol{H}^*\boldsymbol{H}\boldsymbol{g}_\lambda - \lambda\boldsymbol{H}^*\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\Delta}_g\rangle + \lambda\|\boldsymbol{H}\boldsymbol{\Delta}_g\|^2 + \|\boldsymbol{\Delta}_g\|^2 \tag{3.74}$$

co przedstawiono w dodatku A.2. Podstawiając otrzymane wyrażenie (3.74) do nierówności (3.71), otrzymuje się jej nową formę

$$2\langle \boldsymbol{g}_\lambda + \lambda\boldsymbol{H}^*\boldsymbol{H}\boldsymbol{g}_\lambda - \lambda\boldsymbol{H}^*\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\Delta}_g\rangle + \lambda\|\boldsymbol{H}\boldsymbol{\Delta}_g\|^2 + \|\boldsymbol{\Delta}_g\|^2 > 0 \tag{3.75}$$

Jak widać, nierówność (3.75) jest bardzo podobna do nierówności (3.63) uzyskanej dla pierwszego zadania optymalizacyjnego. Stąd określenie warunku koniecznego i wystarczającego istnienia minimum sprowadza się do poniższego założenia

$$\boldsymbol{g}_\lambda + \lambda\boldsymbol{H}^*\boldsymbol{H}\boldsymbol{g}_\lambda - \lambda\boldsymbol{H}^*\boldsymbol{\delta} = 0 \qquad \text{oraz} \qquad \lambda \geqslant 0 \tag{3.76}$$

Ostatecznie rozwiązanie drugiego zadania optymalizacyjnego przyjmuje postać

$$\boldsymbol{g}_\lambda = (\mathbf{1}+\lambda\boldsymbol{H}^*\boldsymbol{H})^{-1}\lambda\boldsymbol{H}^*\boldsymbol{\delta} = \lambda\boldsymbol{H}^*(\mathbf{1}+\lambda\boldsymbol{H}^*\boldsymbol{H})^{-1}\boldsymbol{\delta} \tag{3.77}$$

którą również można zapisać w postaci ułamka operatorowego

$$\boldsymbol{g}_\lambda = \frac{\lambda\boldsymbol{H}^*}{\mathbf{1}+\lambda\boldsymbol{H}^*\boldsymbol{H}}\,\boldsymbol{\delta} \tag{3.78}$$

Otrzymane rozwiązanie $\boldsymbol{g}_\lambda$ również opisuje rodzinę filtrów, określoną wcześniej mianem ***λ-rodziny filtrów quasi-odwrotnych***[4], uzyskanych jednak przy innych założeniach optymalizacyjnych.

Także w tym przypadku, bazując na uzyskanym rozwiązaniu oraz wskaźniku stabilności, utworzono ***funkcję stabilności*** $S_2(\lambda)$

$$S_2(\lambda) = \langle \boldsymbol{g}_\lambda, \boldsymbol{g}_\lambda \rangle = \left\langle \frac{\lambda \boldsymbol{H}^*}{\mathbf{1} + \lambda \boldsymbol{H}^* \boldsymbol{H}} \boldsymbol{\delta}, \frac{\lambda \boldsymbol{H}^*}{\mathbf{1} + \lambda \boldsymbol{H}^* \boldsymbol{H}} \boldsymbol{\delta} \right\rangle \tag{3.79}$$

oraz ***funkcję aproksymacji*** $A_2(\lambda)$

$$A_2(\lambda) = \langle \boldsymbol{H}\boldsymbol{g}_\lambda - \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{H}\boldsymbol{g}_\lambda - \boldsymbol{\delta} \rangle = \left\langle \frac{\lambda \boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^*}{\mathbf{1} + \lambda \boldsymbol{H}^* \boldsymbol{H}} \boldsymbol{\delta} - \boldsymbol{\delta}, \frac{\lambda \boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^*}{\mathbf{1} + \lambda \boldsymbol{H}^* \boldsymbol{H}} \boldsymbol{\delta} - \boldsymbol{\delta} \right\rangle \tag{3.80}$$

bazującą na zdefiniowanym wskaźniku aproksymacji.

Zgodnie z ograniczeniem (3.57), w rozpatrywanym zadaniu optymalizacyjnym wskaźnik aproksymacji układu wypadkowego powinien przyjąć założoną wartość q_2, dlatego w tym wypadku w celu uzyskania optymalnego rozwiązania, należy wyznaczyć wartość mnożnika λ poprzez rozwiązanie równania

$$A_2(\lambda) = q_2 \tag{3.81}$$

[4]Dzieląc licznik i mianownika we wzorze (3.78) przez λ, uzyskuje się rozwiązanie podobne w formie, jak dla pierwszego zadania optymalizacyjnego.

4. Filtry quasi-odwrotne w dziedzinie czasu i częstotliwości

Zastosowany w poprzednim rozdziale zapis sygnałów w postaci wektorów znacznie uprościł przekształcenia matematyczne, które doprowadziły do uzyskania klasy filtrów quasi-odwrotnych. Jednak posługując się rozwiązaniami zapisanymi w postaci (3.66) lub (3.78) nie jesteśmy w stanie określić struktury filtru, rozkładu jego biegunów, jak również jego charakterystyk częstotliwościowych. Dlatego w niniejszym rozdziale dokonano transformacji uzyskanych rozwiązań do dziedziny częstotliwości i czasu, aby m.in. w kolejnym rozdziale przeprowadzić badania symulacyjne.

W pierwszej kolejności ogólną postać rozwiązań zapisano w dziedzinie zmiennej z uzyskując transmitancję filtru quasi-odwrotnego. Jej znajomość umożliwia przebadanie rozkładu biegunów uzyskanej rodziny filtrów oraz daje możliwość określenia charakterystyk częstotliwościowych. Dysponując transmitancją i przyjmując, iż ujemne potęgi zmiennej z reprezentują operacje opóźnienia o określoną liczbę próbek zależną od stopnia potęgi, zaś potęgi dodatnie – operacje przyśpieszenia, można w prosty sposób uzyskać rekurencyjne równania różnicowe opisujące filtry quasi-odwrotne w dziedzinie czasu.

Bazując na uzyskanej transmitancji filtru, przeanalizowano zachowanie się funkcji stabilności $S(\lambda)$ i aproksymacji $A(\lambda)$ dla każdego z dwóch zadań optymalizacyjnych.

Ze względu na przynależność filtrów quasi-odwrotnych do klasy układów nieprzyczynowych, rozpatrzono również pewne aspekty związane z przetwarzaniem sygnałów przyczynowych m.in. o nieskończonym lub bardzo długim czasie trwania.

4.1. Wymierna transmitancja filtru quasi-odwrotnego

Do określenia funkcji transmitancji filtru quasi-odwrotnego wykorzystano zapis rozwiązania dla poszczególnych zadań optymalizacyjnych w postaci ułamka operatorowego. Bazując na

zależnościach z punktu 3.1.2 pomiędzy zapisem wektorowym sygnałów a dziedziną zmiennej z, uzyskanie poszukiwanych funkcji transmitancji staje się bardzo proste.

4.1.1. Pierwsze zadanie optymalizacyjne

Odpowiednikiem w dziedzinie zmiennej zespolonej z rozwiązania (3.66) uzyskanego dla pierwszego zadania optymalizacyjnego jest transmitancja $G_\lambda(z)$ postaci

$$G_\lambda(z) = \frac{H(z^{-1})}{\lambda + H(z^{-1})H(z)} \tag{4.1}$$

Jeśli układ korygowany, będący układem przyczynowym, zostanie opisany jako układ typu SOI[1] rzędu N o transmitancji określonej wzorem

$$H(z) = h_0 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + \ldots + h_N z^{-N} \tag{4.2}$$

to wzór (4.1) przyjmie postać

$$G_\lambda(z) = \frac{h_0 + h_1 z + h_2 z^2 + \ldots + h_N z^N}{\lambda + (h_0 + h_1 z + h_2 z^2 + \ldots + h_N z^N)\,(h_0 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + \ldots + h_N z^{-N})} \tag{4.3}$$

Równość współczynników stojących przy odpowiadających sobie, co do wartości bezwzględnej, potęgach zmiennej z w wielomianach występujących w mianowniku sprawia, że po ich wymnożeniu otrzymuje się obustronny[2] wielomian symetryczny, tzn. wielomian, którego współczynniki stojące przy zmiennej z podniesionej do takiej samej, co do wartości bezwzględnej, potęgi są sobie równe.

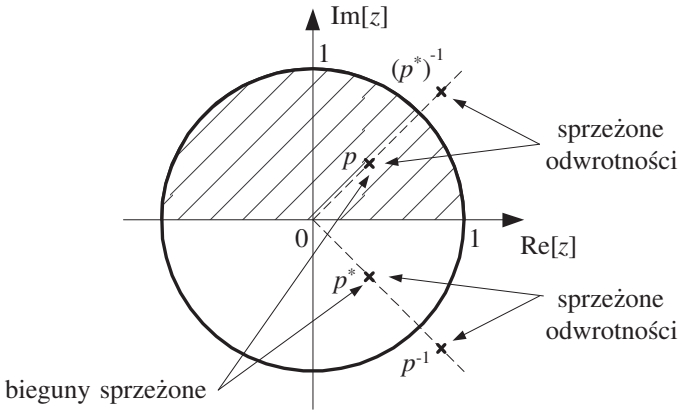
$$G_\lambda(z) = \frac{h_0 + h_1 z + h_2 z^2 + \ldots + h_N z^N}{c_N z^{-N} + \ldots + c_2 z^{-2} + c_1 z^{-1} + c_0 + c_1 z^1 + c_2 z^2 + \ldots + c_N z^N} \tag{4.4}$$

Współczynniki c_n mianownika można wyznaczyć z zależności

$$c_n = \begin{cases} \lambda + \sum_{k=0}^{N} h_k^2, & \text{dla} \quad n = 0 \\ \sum_{k=0}^{N-n} h_k h_{n+k}, & \text{dla} \quad n = 1, 2, \ldots, N \end{cases} \tag{4.5}$$

[1] Założenie to w istocie nie zmniejsza ogólności prezentowanych rozważań, gdyż dowolny stabilny filtr cyfrowy można z dostateczną dokładnością zastąpić filtrem SOI, którego współczynniki będą co do wartości równe próbkom jego obciętej odpowiedzi impulsowej.

[2] W myśl klasyfikacji wielomianów na: prawostronny (zawierający nieujemne potęgi z), lewostronny (zawierający ujemne potęgi z) i obustronny (zawierający nieujemne i ujemne potęgi z).



Rys. 4.1. Przykładowy rozkład biegunów w filtrze quasi-odwrotnym

Uzyskany wielomian mianownika ma współczynniki rzeczywiste, dlatego jego ewentualne pierwiastki zespolone są sprzężone. Dodatkowo jego symetryczność oznacza, że bieguny transmitancji (4.4) występują czwórkami, tzn. jeśli p jest biegunem transmitancji (4.4), to istnieje biegun p^* sprzężony do niego w sensie zespolonym oraz bieguny p^{-1} i $(p^*)^{-1}$ będące ***sprzężonymi odwrotnościami*** odpowiednio do biegunów p^* oraz p. Ilustruje to rys. 4.1.

Wniosek 4.1. *Do jednoznacznego określenia wszystkich biegunów funkcji transmitancji quasi-odwrotnego filtru korekcyjnego wystarczy znajomość biegunów leżących powyżej osi rzeczywistej, wewnątrz koła jednostkowego (zakreskowany obszar na rys. 4.1).*

Jeśli jednak układ korygowany zostanie przedstawiony jako układ typu NOI rzędu N o transmitancji określonej wzorem

$$H(z) = \frac{L(z)}{M(z)} = \frac{l_0 + l_1 z^{-1} + l_2 z^{-2} + \ldots + l_K z^{-K}}{m_0 + m_1 z^{-1} + m_2 z^{-2} + \ldots + m_N z^{-N}}, \qquad K \leqslant N \tag{4.6}$$

wtedy wzór (4.1) przyjmie postać

$$\begin{aligned} G_\lambda(z) &= \frac{\dfrac{L(z^{-1})}{M(z^{-1})}}{\lambda + \dfrac{L(z^{-1})}{M(z^{-1})}\dfrac{L(z)}{M(z)}} = \frac{L(z^{-1})M(z)}{\lambda M(z^{-1})M(z) + L(z^{-1})L(z)} = \\ &= \frac{d_{-N}z^{-N} + d_{-N+1}z^{-N+1} + \ldots + d_{K-1}z^{K-1} + d_K z^K}{c_N z^{-N} + \ldots + c_1 z^{-1} + c_0 + c_1 z + \ldots + c_N z^N} \end{aligned} \tag{4.7}$$

Współczynniki d_n wielomianu licznika można wyznaczyć ze wzoru

$$d_n = \sum_{k=\max\{0,n\}}^{\min\{N+n,K\}} l_k m_{k-n}, \qquad n = -N, -N+1, \ldots, K-1, K \tag{4.8}$$

Wartości współczynników c_n wielomianu mianownika uzyskuje się na podstawie zależności

$$c_n = \begin{cases} \lambda \sum_{k=0}^{N} m_k^2 + \sum_{k=0}^{K} l_k^2, & \text{dla} \quad n = 0 \\ \lambda \sum_{k=0}^{N-n} m_k m_{n+k} + \sum_{k=0}^{K-n} l_k l_{n+k}, & \text{dla} \quad n = 1, 2, \ldots, K \\ \lambda \sum_{k=0}^{N-n} m_k m_{n+k}, & \text{dla} \quad n = K+1, K+2, \ldots, N \end{cases} \tag{4.9}$$

Ze względu na występowanie biegunów zarówno wewnątrz, jak i na zewnątrz koła jednostkowego, uzyskany filtr quasi-odwrotny będzie traktowany jako układ nieprzyczynowy. Jak dowiedziono w punkcie 2.3.2, układ nieprzyczynowy jest stabilny w sensie BIBO, gdy zostanie podzielony na równoległe połączenie układu przyczynowego (grupującego bieguny z wnętrza koła jednostkowego) i antyprzyczynowego (grupującego bieguny z zewnętrza koła jednostkowego). Zatem transmitancja określona wzorem (4.4) lub (4.7) musi zostać przekształcona do postaci

$$G_\lambda(z) = G_\lambda^-(z) + G_\lambda^+(z) \tag{4.10}$$

gdzie transmitancja $G_\lambda^-(z)$ będzie zawierała tylko bieguny z zewnętrza koła jednostkowego, a transmitancja $G_\lambda^+(z)$ tylko bieguny z jego wnętrza. Poniżej dokonano przykładowego rozkładu transmitancji $G_\lambda(z)$ określonej wzorem (4.4)[3].

Pojedyncze bieguny zespolone

Zakładając, że filtr quasi-odwrotny posiada w obszarze ograniczonym przez oś rzeczywistą i górną część okręgu jednostkowego jednokrotne bieguny zespolone p_1, p_2, …, p_P oraz wymnażając licznik i mianownik transmitancji $G_\lambda(z)$ opisanej zależnością (4.4) przez czynnik z^{-N} w celu uzyskania tylko ujemnych potęg zmiennej z, uzyskuje się jej następującą postać

$$G_\lambda(z) = \frac{h_0 z^{-N} + h_1 z^{-(N-1)} + h_2 z^{-(N-2)} + \ldots + h_N}{\prod_{i=1}^{P} \left(1 - p_i z^{-1}\right)\left(1 - p_i^* z^{-1}\right)\left(1 - p_i^{-1} z^{-1}\right)\left(1 - (p_i^*)^{-1} z^{-1}\right)} \tag{4.11}$$

W celu wyodrębnienia składników zawierających bieguny z wnętrza oraz zewnętrza koła jednostkowego, transmitancję (4.11) przedstawiono w postaci ułamków prostych

$$G_\lambda(z) \;=\; \sum_{i=1}^{P} \left(\frac{a_i(p_i)}{1 - p_i z^{-1}} + \frac{a_i^*(p_i)}{1 - p_i^* z^{-1}} + \frac{a_i(p_i^{-1})}{1 - p_i^{-1} z^{-1}} + \frac{a_i^*(p_i^{-1})}{1 - (p_i^*)^{-1} z^{-1}} \right) \tag{4.12}$$

[3]Rozkładu transmitancji (4.7) uzyskanej dla przypadku, gdy układ korygowany jest typu NOI można dokonać identycznie, dlatego problem ten nie zostanie przedstawiony w niniejszej pracy.

gdzie w ogólnym przypadku [62]

$$a_i\left(p_i\right) = G_\lambda(z)\left(1 - p_i z^{-1}\right)\Big|_{z=p_i} \tag{4.13}$$

Następnie dokonano podziału uzyskanej transmitancji zgodnie ze wzorem (4.10).

$$\begin{aligned} G_\lambda^+(z) &= \sum_{i=1}^{P}\left(\frac{a_i(p_i)}{1-p_i z^{-1}} + \frac{a_i^*(p_i)}{1-p_i^* z^{-1}}\right) = \\ &= \sum_{i=1}^{P}\frac{-2\,\mathrm{Re}[a_i(p_i)p_i^*]z^{-1} + 2\,\mathrm{Re}[a_i(p_i)]}{|p_i|^2 z^{-2} - 2\,\mathrm{Re}[p_i]z^{-1} + 1} \end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned} G_\lambda^-(z) &= \sum_{i=1}^{P}\left(\frac{a_i(p_i^{-1})}{1-p_i^{-1} z^{-1}} + \frac{a_i^*(p_i^{-1})}{1-\left(p_i^*\right)^{-1} z^{-1}}\right) = \\ &= \sum_{i=1}^{P}\frac{-2\,\mathrm{Re}[a_i(p_i^{-1})(p_i^*)^{-1}]z^{-1} + 2\,\mathrm{Re}[a_i(p_i^{-1})]}{\left|p_i^{-1}\right|^2 z^{-2} - 2\,\mathrm{Re}[p_i^{-1}]z^{-1} + 1} \end{aligned} \tag{4.15}$$

Obszarem zbieżności części przyczynowej $G_\lambda^+(z)$ transmitancji $G_\lambda(z)$ jest zewnętrze koła o promieniu r

$$\max\{|p_i|\} < r < 1$$

Natomiast części antyprzyczynowej $X_\lambda^-(z)$ przyporządkowano obszar zbieżności będący wnętrzem koła o promieniu R

$$1 < R < \min\{|p_i^{-1}|\}$$

Takie podejście daje gwarancję, że filtr quasi-odwrotny będzie układem stabilnym.

Ponieważ $G_\lambda^-(z)$ jest traktowany jako układ antyprzyczynowy, dlatego licznik i mianownik jego transmitancji zostanie przemnożony przez czynnik z^{-2}, w celu uzyskania tylko dodatnich potęg zmiennej z. Równocześnie licznik i mianownik we wzorze (4.15) dzielimy przez czynnik $\left|p_i^{-1}\right|^2$ uzyskując

$$G_\lambda^-(z) = \sum_{i=1}^{P}\frac{\dfrac{2\,\mathrm{Re}[a_i(p_i^{-1})]}{\left|p_i^{-1}\right|^2}z^2 - \dfrac{2\,\mathrm{Re}[a_i(p_i^{-1})(p_i^*)^{-1}]}{\left|p_i^{-1}\right|^2}z}{\dfrac{1}{\left|p_i^{-1}\right|^2}z^2 - \dfrac{2\,\mathrm{Re}[p_i^{-1}]}{\left|p_i^{-1}\right|^2}z + 1} \tag{4.16}$$

Przeprowadzenie obydwu powyższych operacje ułatwi późniejsze uzyskanie współczynników równań w dziedzinie czasu wprost z transmitancji $G_\lambda^-(z)$ i $G_\lambda^+(z)$, umożliwiając tym samym przetwarzanie sygnałów bezpośrednio w oparciu o próbki czasowe.

Dodatkowo można zauważyć, że

$$\frac{2\,\mathrm{Re}[p_i^{-1}]}{\left|p_i^{-1}\right|^2} = 2\,\mathrm{Re}[p_i] \tag{4.17}$$

$$\frac{1}{\left|p_i^{-1}\right|^2} = |p_i|^2 \tag{4.18}$$

$$\frac{2\,\mathrm{Re}[a_i(p_i^{-1})]}{\left|p_i^{-1}\right|^2} = 2\,\mathrm{Re}[a_i(p_i^{-1})]|p_i|^2 \tag{4.19}$$

$$\frac{2\,\mathrm{Re}[a_i(p_i^{-1})(p_i^*)^{-1}]}{\left|p_i^{-1}\right|^2} = 2\,\mathrm{Re}[a_i(p_i^{-1})p_i] \tag{4.20}$$

Zatem transmitancja $G_\lambda^-(z)$ części antyprzyczynowej filtru quasi-odwrotnego przyjmuje postać

$$G_\lambda^-(z) = \sum_{i=1}^{P} \frac{2\,\mathrm{Re}[a_i(p_i^{-1})]|p_i|^2 z^2 - 2\,\mathrm{Re}[a_i(p_i^{-1})p_i]z}{|p_i|^2 z^2 - 2\,\mathrm{Re}[p_i]z + 1} \tag{4.21}$$

Ostatecznie pełną transmitancję filtru quasi-odwrotnego po przekształceniach opisuje zależność

$$\begin{aligned} G_\lambda(z) &= G_\lambda^+(z) + G_\lambda^-(z) = \\ &= \sum_{i=1}^{P} \frac{-2\,\mathrm{Re}[a_i(p_i)p_i^*]z^{-1} + 2\,\mathrm{Re}[a_i(p_i)]}{|p_i|^2 z^{-2} - 2\,\mathrm{Re}[p_i]z^{-1} + 1} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{P} \frac{2\,\mathrm{Re}[a_i(p_i^{-1})]|p_i|^2 z^2 - 2\,\mathrm{Re}[a_i(p_i^{-1})p_i]z}{|p_i|^2 z^2 - 2\,\mathrm{Re}[p_i]z + 1} \end{aligned} \tag{4.22}$$

Analiza wzoru (4.22) pokazuje, że każdy z dwóch filtrów składowych (przyczynowy i antyprzyczynowy) można przedstawić jako równoległe połączenie układów drugiego rzędu, określonych mianem ***filtrów prostych***, których współczynniki wyznaczane są na podstawie poszczególnych biegunów p_i.

Transmitancja $G_\lambda^+(z)$ zawiera tylko ujemne potęgi zmiennej z, zatem w dziedzinie czasu ta część będzie operowała na aktualnej próbce sygnału wejściowego i poprzednich próbkach sygnału wejściowego i wyjściowego. W transmitancji $G_\lambda^-(z)$ występują tylko dodatnie potęgi zmiennej z co wskazuje, że w dziedzinie czasu ta część filtra będzie operowała na próbkach z przyszłości w stosunku do aktualnie przetwarzanej próbki.

Odpowiednie współczynniki mianownika transmitancji $G_\lambda^+(z)$ i $G_\lambda^-(z)$ są takie same, dlatego w dziedzinie czasu współczynniki występujące w części rekursywnej obydwu składowych (przyczynowej i antyprzyczynowej) filtra quasi-odwrotnego będą identyczne co do wartości.

Wielokrotne bieguny zespolone

Uogólniając powyższe wyniki można podobnie rozpatrzyć przypadek, w którym uzyskany quasi-odwrotny filtr korekcyjny o transmitancji $G_\lambda(z)$ posiada w obszarze ograniczonym przez oś rzeczywistą i górną część okręgu jednostkowego bieguny zespolone: p_1, p_2, ..., p_P odpowiednio o krotnościach: σ_1, σ_2, ..., σ_P. Wtedy transmitancję określoną wzorem (4.4) można zapisać w postaci[4]

$$G_\lambda(z) = \frac{h_0 z^{-N} + h_1 z^{-(N-1)} + h_2 z^{-(N-2)} + \ldots + h_N}{\prod_{i=1}^{P} \left(1 - p_i z^{-1}\right)^{\sigma_i} \left(1 - p_i^* z^{-1}\right)^{\sigma_i} \left(1 - p_i^{-1} z^{-1}\right)^{\sigma_i} \left(1 - (p_i^*)^{-1} z^{-1}\right)^{\sigma_i}} \tag{4.23}$$

Dysponując mianownikiem transmitancji $X_\lambda(z)$ przedstawionym w postaci iloczynowej, można dokonać jej rozkładu na ułamki proste. W wyniku tego zabiegu transmitancję określoną wzorem (4.23) można teraz przedstawić w postaci sumy ułamków prostych

$$\begin{aligned} G_\lambda(z) &= \sum_{i=1}^{P} \sum_{k=1}^{\sigma_i} \left(\frac{a_{ik}(p_i)}{(1 - p_i z^{-1})^k} + \frac{a_{ik}^*(p_i)}{(1 - p_i^* z^{-1})^k} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{a_{ik}\left(p_i^{-1}\right)}{\left(1 - p_i^{-1} z^{-1}\right)^k} + \frac{a_{ik}^*\left(p_i^{-1}\right)}{\left(1 - \left(p_i^{-1}\right)^* z^{-1}\right)^k} \right) \end{aligned} \tag{4.24}$$

gdzie w ogólnym przypadku [12]

$$a_{ik}(p_i) = \frac{1}{(\sigma_i - k)!} \left[\frac{d^{\sigma_i - k}}{dz^{\sigma_i - k}} \left(\frac{G_\lambda(z)}{z} (z - p_i)^{\sigma_i} \right) \right] \Bigg|_{z = p_i} \tag{4.25}$$

Grupując oddzielnie ułamki zawierające bieguny leżące wewnątrz okręgu jednostkowego i na zewnątrz, doprowadza się transmitancję $G_\lambda(z)$ do postaci zapisanej wzorem (4.10), gdzie

$$G_\lambda^+(z) = \sum_{i=1}^{P} \sum_{k=1}^{\sigma_i} \left(\frac{a_{ik}(p_i)}{(1 - p_i z^{-1})^k} + \frac{a_{ik}^*(p_i)}{(1 - p_i^* z^{-1})^k} \right) \tag{4.26}$$

$$G_\lambda^-(z) = \sum_{i=1}^{P} \sum_{k=1}^{\sigma_i} \left(\frac{a_{ik}\left(p_i^{-1}\right)}{\left(1 - p_i^{-1} z^{-1}\right)^k} + \frac{a_{ik}^*\left(p_i^{-1}\right)}{\left(1 - \left(p_i^{-1}\right)^* z^{-1}\right)^k} \right) \tag{4.27}$$

Zajmijmy się tylko sumą ułamków prostych zawierających bieguny z wnętrza okręgu jednostkowego. Doprowadzając obydwa czynniki do wspólnego mianownika, wspomnianą sumę

[4]Przy rozpatrywaniu ogólnego wzoru na transmitancję filtru quasi-odwrotnego, świadomie zrezygnowano z uwzględnienia biegunów rzeczywistych, gdyż rozpatrywanie ich znacznie komplikuje ogólne wzory, czyniąc je mało czytelnymi. Rozważono więc tylko przypadek z biegunami zespolonymi, ze względu na ich specyficzny rozkład.

można przedstawić w postaci pojedynczego ułamka

$$\frac{a_{ik}(p_i)\left(1-p_i^* z^{-1}\right)^k + a_{ik}^*(p_i)\left(1-p_i z^{-1}\right)^k}{\left((1-p_i z^{-1})(1-p_i^* z^{-1})\right)^k} \tag{4.28}$$

Stosując w liczniku wzoru (4.28) wzór dwumianowy Newtona

$$(a-b)^k = \sum_{q=0}^{k}(-1)^q \binom{k}{q} a^{k-q} b^q \tag{4.29}$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned}
&\frac{a_{ik}(p_i)\sum_{q=0}^{k}(-1)^q\binom{k}{q}(p_i^*)^q z^{-q} + a_{ik}^*(p_i)\sum_{q=0}^{k}(-1)^q\binom{k}{q}p_i^q z^{-q}}{(1-p_i^* z^{-1}-p_i z^{-1}+p_i p_i^* z^{-2})^k} = \\
= &\frac{\sum_{q=0}^{k}(-1)^q\binom{k}{q}a_{ik}(p_i)(p_i^*)^q z^{-q} + \sum_{q=0}^{k}(-1)^q\binom{k}{q}a_{ik}^*(p_i)p_i^q z^{-q}}{(1-p_i^* z^{-1}-p_i z^{-1}+p_i p_i^* z^{-2})^k} = \\
= &\frac{\sum_{q=0}^{k}(-1)^q\binom{k}{q}(a_{ik}(p_i)(p_i^*)^q + a_{ik}^*(p_i)p_i^q) z^{-q}}{(1-2\,\mathrm{Re}[p_i] z^{-1}+|p_i|^2 z^{-2})^k}
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Identyczne przekształcenia można zastosować do sum ułamków prostych zawierających bieguny leżące na zewnątrz koła jednostkowego otrzymując

$$\frac{\sum_{q=0}^{k}(-1)^q\binom{k}{q}\left(a_{ik}(p_i^{-1})(p_i^*)^{-q} + a_{ik}^*(p_i^{-1})p_i^{-q}\right)z^{-q}}{\left(1-2\,\mathrm{Re}[p_i^{-1}]z^{-1}+\left|p_i^{-1}\right|^2 z^{-2}\right)^k} \tag{4.31}$$

Układ antyprzyczynowy powinien zawierać tylko operacje przyśpieszenia, a więc tylko dodatnie potęgi zmiennej z. Zatem licznik i mianownik wyrażenia (4.31) mnożymy przez czynnik z^{2k} otrzymując

$$\frac{\sum_{q=0}^{k}(-1)^q\binom{k}{q}\left(a_{ik}(p_i^{-1})(p_i^*)^{-q} + a_{ik}^*(p_i^{-1})p_i^{-q}\right)z^{2k-q}}{\left(\left|p_i^{-1}\right|^2 - 2\,\mathrm{Re}[p_i^{-1}]z^1 + z^2\right)^k} \tag{4.32}$$

W wyniku przedstawionych powyżej przekształceń, funkcja transmitancji $G_\lambda(z)$ filtru quasi-odwrotnego związana z pierwszym zadaniem optymalizacyjnym, przyjmuje ostatecznie

postać określoną poniższym wzorem.

$$\begin{aligned} G_\lambda(z) &= G_\lambda^-(z) + G_\lambda^+(z) = \\ &= \sum_{i=1}^{P}\sum_{k=1}^{\sigma_i} \frac{\sum_{q=0}^{k}(-1)^q \binom{k}{q}\left(a_{ik}(p_i^{-1})(p_i^*)^{-q} + a_{ik}^*(p_i^{-1})p_i^{-q}\right) z^{2k-q}}{\left(\left|p_i^{-1}\right|^2 - 2\,\mathrm{Re}[p_i^{-1}]z + z^2\right)^k} + \\ &\quad + \sum_{i=1}^{P}\sum_{k=1}^{\sigma_i} \frac{\sum_{q=0}^{k}(-1)^q \binom{k}{q}\left(a_{ik}(p_i)(p_i^*)^{q} + a_{ik}^*(p_i)p_i^{q}\right) z^{-q}}{\left(1 - 2\,\mathrm{Re}[p_i]z^{-1} + |p_i|^2 z^{-2}\right)^k} \end{aligned} \tag{4.33}$$

4.1.2. Drugie zadanie optymalizacyjne

Podobnie jak w punkcie 4.1.1, odpowiednikiem w dziedzinie zmiennej zespolonej z rozwiązania (3.78) jest funkcja

$$G_\lambda(z) = \frac{\lambda H(z^{-1})}{1 + \lambda H(z^{-1})H(z)} \tag{4.34}$$

która reprezentuje transmitancję filtrów quasi-odwrotnych dla tego zadania optymalizacyjnego. Dzieląc licznik i mianownik po prawej stronie równania (4.34) przez λ, otrzymuje się

$$G_\lambda(z) = \frac{H(z^{-1})}{\frac{1}{\lambda} + H(z^{-1})H(z)} \tag{4.35}$$

Wzór (4.35) ma zatem identyczną postać jak wzór (4.1), przedstawiający transmitancję filtrów quasi-odwrotnych dla pierwszego zadania optymalizacyjnego. Można zatem przyjąć, że przedstawione powyżej rozważania i wnioski są również prawdziwe dla rozwiązania uzyskanego w drugim zadaniu optymalizacyjnym. Także wyprowadzone wcześniej wzory mogą zostać bezpośrednio zastosowane do obliczeń związanych z drugim zadaniem optymalizacyjnym. Wystarczy bowiem zastosować w nich podstawienie

$$\frac{1}{\lambda} \to \lambda \tag{4.36}$$

4.1.3. Transformacja do postaci wielomianowej

W poprzednim punkcie pokazano, że rozwiązania uzyskane w rozdziale 3. dla obydwu zadań optymalizacyjnych dają się w łatwy sposób przedstawić w postaci wymiernej transmitancji $G_\lambda(z)$. Jednak możliwe jest również przedstawienie ich w postaci nieskończonego

wielomianu obustronnego (szeregu Laurenta), tj.

$$G(z) = \ldots + g_{-2}z^2 + g_{-1}z + g_0 + g_1 z^{-1} + g_2 z^{-2} + \ldots \tag{4.37}$$

wyróżniając część przyczynową

$$G^+(z) = g_0 + g_1 z^{-1} + g_2 z^{-2} + \ldots \tag{4.38}$$

oraz antyprzyczynową

$$G^-(z) = g_{-1}z + g_{-2}z^2 + g_{-3}z^3 \ldots \tag{4.39}$$

Dzięki temu możliwe jest np. bezpośrednie uzyskanie odpowiedzi impulsowej filtru quasi-odwrotnego. Oczywiście rozpatrywane rozwinięcie będzie równoważne postaci wymiernej tylko wtedy, gdy liczba niezerowych współczynników, zarówno części przyczynowej jak i antyprzyczynowej, będzie dążyła do nieskończoności. W praktyce rozwinięcie takie nie miałoby zastosowania, dlatego zawsze konieczne jest określenie maksymalnej wartości indeksu współczynnika rozwinięcia. Należy przy tym zaznaczyć, iż w ogólnym przypadku przyjmowana wartość indeksu nie musi być taka sama dla części przyczynowej i antyprzyczynowej.

W zależności od aproksymacji układu korygowanego (za pomocą transmitancji wielomianowej lub wymiernej), uzyskuje się transmitancje filtru korekcyjnego odpowiednio postaci (4.4) lub (4.7), gdzie mianownik jest obustronnym symetrycznym wielomianem zmiennej z. Oznaczając przez M numer maksymalnego współczynnika poszukiwanego rozwinięcia wielomianowego zarówno dla części przyczynowej jak również antyprzyczynowej oraz porównując wzory (4.4) i (4.37) oraz (4.7) i (4.37) można zauważyć, że wyznaczenie współczynników g_n sprowadza się do rozwiązania układu $2M+1$ równań liniowych postaci

$$\sum_{k=-M}^{M} c_{|k+n|} g_{-k} = h_n \qquad \text{transm. wielomianowa} \tag{4.40}$$

$$\sum_{k=-M}^{M} c_{|k+n|} g_{-k} = d_n \qquad \text{transm. wymierna} \tag{4.41}$$

$$n = -M, -M+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, M-1, M$$

Dla przykładu, jeśli układ korygowany został opisany transmitancją postaci (4.2), gdzie $N = 2$, zaś numer maksymalnego współczynnika g_n poszukiwanego rozwinięcia wielomianowego założymy $M = 4$, to układ równań zapisany w postaci macierzowej przyjmie postać

$$\begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & c_0 & c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & c_1 & c_0 & c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & c_1 & c_0 & c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 & c_1 & c_0 & c_1 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_2 & c_1 & c_0 & c_1 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_2 & c_1 & c_0 & c_1 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_2 & c_1 & c_0 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_2 & c_1 & c_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{-4} \\ g_{-3} \\ g_{-2} \\ g_{-1} \\ g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.42}$$

Natomiast zakładając, że układ korygowany został opisany transmitancją w postaci (4.6) oraz przyjmując: $N = 2$, $K = 1$, $M = 4$, otrzymujemy poniższy układ równań

$$\begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & c_0 & c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & c_1 & c_0 & c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & c_1 & c_0 & c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 & c_1 & c_0 & c_1 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_2 & c_1 & c_0 & c_1 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_2 & c_1 & c_0 & c_1 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_2 & c_1 & c_0 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_2 & c_1 & c_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{-4} \\ g_{-3} \\ g_{-2} \\ g_{-1} \\ g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_{-2} \\ d_{-1} \\ d_0 \\ d_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.43}$$

4.2. Charakterystyki częstotliwościowe

Dysponując transmitancją układu można wyznaczyć jego charakterystyki częstotliwościowe stosując podstawienie

$$z = e^{j\omega} \tag{4.44}$$

Zastosowanie niniejszego podstawienia do transmitancji (4.1) filtru quasi-odwrotnego uzyskanej dla pierwszego zadania optymalizacyjnego prowadzi do poniższego wzoru

$$G_\lambda(e^{j\omega}) = \frac{H(e^{-j\omega})}{\lambda + H(e^{-j\omega})H(e^{j\omega})} = \frac{H(e^{-j\omega})}{\lambda + |H(e^{j\omega})|^2} \tag{4.45}$$

Przedstawiając funkcję znajdującą się w liczniku wzoru (4.45) w postaci modułu i argumentu, tj.

$$H(e^{-j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{-j\sphericalangle H(e^{j\omega})} \tag{4.46}$$

uzyskuje się charakterystykę częstotliwościową amplitudową

$$|G_\lambda(e^{j\omega})| = \frac{|H(e^{j\omega})|}{\lambda + |H(e^{j\omega})|^2} \tag{4.47}$$

oraz fazową

$$\sphericalangle G_\lambda(e^{j\omega}) = -\sphericalangle H(e^{j\omega}) \tag{4.48}$$

filtru quasi-odwrotnego. Jak można zauważyć, mnożnik λ wpływa tylko na postać charakterystyki amplitudowej. Charakterystyka fazowa jest niezależna od λ, będąc dodatkowo dokładną odwrotnością charakterystyki fazowej układu korygowanego.

W praktyce rzeczywista transmitancja $H_R(z)$ układu zniekształcającego różni się od przyjętej transmitancji $H(z)$. Przez to

$$\sphericalangle H(e^{j\omega}) \neq \sphericalangle H_R(e^{j\omega}) \tag{4.49}$$

Dlatego pomimo spełnienia równości (4.48) dla każdej wartości λ, dokładność korekcji przesunięć fazowych wprowadzanych przez układ zniekształcający jest zależna od dokładności jego opisu przez transmitancję $H(z)$.

4.3. Analityczna interpretacja funkcji stabilności i aproksymacji

Opis układu zniekształcającego w dziedzinie częstotliwości umożliwia takie przedstawienie wzorów opisujących funkcje stabilności $S(\lambda)$ i aproksymacji $A(\lambda)$, które pozwala na analityczne określenie ich przebiegów dla każdego z dwóch zadań optymalizacyjnych. To z kolei umożliwia analizę wpływu zakładanej wartości q_1 wskaźnika stabilności (pierwsze zadanie optymalizacyjne) lub wartości q_2 wskaźnika aproksymacji (drugie zadanie optymalizacyjne) na uzyskiwaną wartość mnożnika λ, a tym samym na wartość przyjmowaną przez drugi z wskaźników w danym zadaniu optymalizacyjnym.

4.3.1. Pierwsze zadanie optymalizacyjne

Zgodnie z przyjętą definicją, funkcja stabilności $S_1(\lambda)$ reprezentuje energię odpowiedzi impulsowej filtru quasi-odwrotnego. Na mocy wzoru Parsevala, wzór (3.67) można więc zapisać w postaci

$$S_1(\lambda) \;=\; \frac{1}{2\pi j}\oint_{|z|=1} G_\lambda(z)G_\lambda(z^{-1})z^{-1}dz \tag{4.50}$$

Wstawiając wzór (4.1) do wzoru (4.50) otrzymujemy

$$\begin{aligned} S_1(\lambda) &= \frac{1}{2\pi j}\oint_{|z|=1}\frac{H(z^{-1})}{\lambda+H(z)H(z^{-1})}\,\frac{H(z)}{\lambda+H(z^{-1})H(z)}z^{-1}dz = \\ &= \frac{1}{2\pi j}\oint_{|z|=1}\frac{|H(z)|^2}{\left(\lambda+|H(z)|^2\right)^2}\,z^{-1}dz \end{aligned} \tag{4.51}$$

Całka krzywoliniowa wyznaczana jest wzdłuż okręgu jednostkowego, dlatego zastosowanie podstawienia $z=e^{j\omega}$, gdzie $\omega\in\langle\pi,\pi\rangle$ powoduje, że wzór (4.51) można przedstawić w postaci

$$S_1(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|H(e^{j\omega})|^2}{\left(\lambda+|H(e^{j\omega})|^2\right)^2}\,d\omega \tag{4.52}$$

Podobnie postępujemy z funkcją aproksymacji $A_1(\lambda)$.

$$\begin{aligned} A_1(\lambda) &= \frac{1}{2\pi j}\oint_{|z|=1}\Big(H(z)X_\lambda(z)-1\Big)\Big(H(z^{-1})X_\lambda(z^{-1})-1\Big)z^{-1}dz = \\ &= \frac{1}{2\pi j}\oint_{|z|=1}\left(\frac{H(z)H(z^{-1})}{\lambda+H(z^{-1})H(z)}-1\right)\left(\frac{H(z^{-1})H(z)}{\lambda+H(z)H(z^{-1})}-1\right)z^{-1}dz = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\lambda^2}{\left(\lambda+|H(e^{j\omega})|^2\right)^2}\,d\omega \end{aligned} \tag{4.53}$$

Określenie zachowania się funkcji stabilności $S_1(\lambda)$ i aproksymacji $A_1(\lambda)$ wymaga wyznaczenia pierwszych pochodnych tych funkcji względem λ.

$$\begin{aligned} S_1'(\lambda) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{-|H(e^{j\omega})|^2\,2(\lambda+|H(e^{j\omega})|^2)}{(\lambda+|H(e^{j\omega})|^2)^4}\,d\omega = \\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2|H(e^{j\omega})|^2}{(\lambda+|H(e^{j\omega})|^2)^3}\,d\omega \end{aligned} \tag{4.54}$$

$$\begin{aligned} A_1'(\lambda) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2\lambda\left(\lambda+|H(e^{j\omega})|^2\right)^2-\lambda^2\,2(\lambda+|H(e^{j\omega})|^2)}{(\lambda+|H(e^{j\omega})|^2)^4}\,d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2\lambda|H(e^{j\omega})|^2}{(\lambda+|H(e^{j\omega})|^2)^3}\,d\omega \end{aligned} \tag{4.55}$$

Ponieważ

$$\forall_{\lambda\geqslant 0}\quad S_1'(\lambda)<0 \tag{4.56}$$

$$\forall_{\lambda>0}\quad A_1'(\lambda)>0 \tag{4.57}$$

dlatego funkcja stabilności jest funkcją malejącą, natomiast funkcja aproksymacji rosnącą. Oszacowanie wartości funkcji stabilności i aproksymacji dla wartości granicznych mnożnika

λ, tj. $\lambda = 0$ oraz $\lambda = \infty$ prowadzi do następujących wyników

$$\lim_{\lambda \to 0} S_1(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\omega}{|H(e^{j\omega})|^2} > 0 \tag{4.58}$$

$$\lim_{\lambda \to \infty} S_1(\lambda) = 0 \tag{4.59}$$

$$\lim_{\lambda \to 0} A_1(\lambda) = 0 \tag{4.60}$$

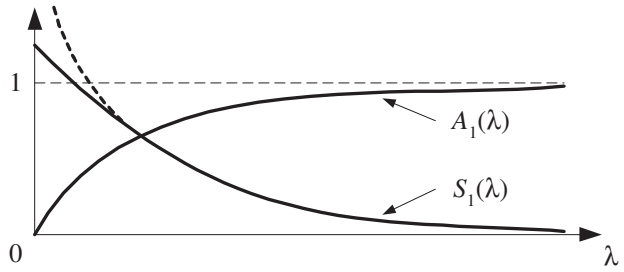
$$\lim_{\lambda \to \infty} A_1(\lambda) = 1 \tag{4.61}$$

Przyjęcie $\lambda = 0$ oznacza, że quasi-odwrotny filtr korekcyjny staje się idealnym filtrem korekcyjnym. Trzeba zauważyć, że jeśli układ korygowany posiada zera leżące bardzo blisko okręgu jednostkowego, to funkcja podcałkowa we wzorze (4.58) może osiągać bardzo duże wartości, przez co wartość funkcji stabilności w punkcie $\lambda = 0$ znacznie wzrasta. W szczególności, gdy układ korygowany posiada zera leżące na okręgu jednostkowym, co oznacza, że idealny filtr korekcyjny nie jest stabilny w sensie BIBO, całka (4.58) nie jest zbieżna, tj.

$$\lim_{\lambda \to 0} S_1(\lambda) \to \infty \tag{4.62}$$

Wartość funkcji stabilności może być interpretowana w dziedzinie czasu jako energia odpowiedzi impulsowej filtru korekcyjnego. Zatem jej nieskończona wartość oznacza, że odwrotny filtr korekcyjny nie jest energetycznie stabilny. Dobranie współczynnika $\lambda > 0$ powoduje, iż w omawianym przypadku występowania zer układu korygowanego na okręgu jednostkowym, wartość mianownika we wzorze (4.52) jest różna od zera, a wiec energia odpowiedzi impulsowej filtru korekcyjnego, będącego w takim przypadku filtrem quasi-odwrotnym, przyjmuje skończoną wartość. Sukcesywne zwiększanie współczynnika λ prowadzi do coraz mniejszej energii sygnału odpowiedzi impulsowej filtru korekcyjnego, a więc osiągania coraz lepszego wskaźnika stabilności. To polepszanie wskaźnika stabilności filtru prowadzi jednak do pogorszenia się aproksymacji układu tożsamościowego przez układ wypadkowy, na co wskazuje zwiększająca się wartość funkcji aproksymacji, która oddaje zmiany wskaźnika aproksymacji w zależności od zmian mnożnika λ. Dlatego przy wyborze λ należy kierować się kompromisem pomiędzy pożądaną wartością wskaźnika stabilności filtru korekcyjnego, a poziomem aproksymacji układu tożsamościowego przez kaskadowe połączenie układu korygowanego i zastosowanego filtru korekcyjnego.

Przykładowy przebieg funkcji stabilności i aproksymacji dla pierwszego zadania optymalizacyjnego pokazano na rys. 4.2. Gruba przerywana linia oddaje zachowanie się funkcji stabilności, kiedy układ korygowany posiada zera leżące na okręgu jednostkowym.



Rys. 4.2. Przykładowe wykresy funkcji stabilności $S_1(\lambda)$ i aproksymacji $A_1(\lambda)$ dla pierwszego zadania optymalizacyjnego

4.3.2. Drugie zadanie optymalizacyjne

Podobnie jak dla pierwszego zadania optymalizacyjnego, również w przypadku drugiego zadania uwzględnienie transmitancji (4.34) we wzorze (3.79) definiującym funcję stabilności otrzymuje się

$$\begin{aligned} S_2(\lambda) &= \frac{1}{2\pi j}\oint_{|z|=1} \frac{\lambda H(z^{-1})}{1+\lambda H(z^{-1})H(z)} \frac{\lambda H(z)}{1+\lambda H(z)H(z^{-1})} z^{-1}dz = \\ &= \frac{1}{2\pi j}\oint_{|z|=1} \frac{\lambda^2 |H(z)|^2}{\left(1+\lambda|H(z)|^2\right)^2} z^{-1}dz = \qquad (4.63) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\lambda^2 |H(e^{j\omega})|^2}{\left(1+\lambda|H(e^{j\omega})|^2\right)^2} d\omega \qquad (4.64) \end{aligned}$$

Natomiast funkcją aproksymacji (3.80) po uwzględnieniu transmitancji (4.34) przyjmie następującą postać

$$\begin{aligned} A_2(\lambda) &= \frac{1}{2\pi j}\oint_{|z|=1} \left(\frac{H(z)\lambda H(z^{-1})}{1+\lambda H(z^{-1})H(z)} - 1\right)\left(\frac{H(z^{-1})\lambda H(z)}{1+\lambda H(z)H(z^{-1})} - 1\right) z^{-1}dz = \\ &= \frac{1}{2\pi j}\oint_{|z|=1} \frac{1}{\left(1+\lambda|H(z)|^2\right)^2} z^{-1}dz = \qquad (4.65) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\omega}{\left(1+\lambda|H(e^{j\omega})|^2\right)^2} \qquad (4.66) \end{aligned}$$

Także w tym przypadku badanie przebiegów funkcji stabilności $S_2(\lambda)$ i aproksymacji $A_2(\lambda)$ wymaga wyznaczenia ich pierwszych pochodnych względem λ

$$\begin{aligned} S_2'(\lambda) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{2\lambda|H(e^{j\omega})|^2(1+\lambda|H(e^{j\omega})|^2) - \lambda^2|H(e^{j\omega})|^2\, 2|H(e^{j\omega})|^2}{\left(1+\lambda|H(e^{j\omega})|^2\right)^3} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{2\lambda|H(e^{j\omega})|^2}{\left(1+\lambda|H(e^{j\omega})|^2\right)^3} d\omega > 0 \quad \forall_{\lambda>0} \qquad (4.67) \end{aligned}$$

$$A_2^{'}(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{-2(1+\lambda|H(e^{j\omega})|^2)\,|H(e^{j\omega})|^2}{(1+\lambda|H(e^{j\omega})|^2)^4}\,d\omega = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{2|H(e^{j\omega})|^2}{(1+\lambda|H(e^{j\omega})|^2)^3}\,d\omega < 0 \quad \forall_{\lambda\geqslant 0} \tag{4.68}$$

oraz określenia zachowania się tych funkcji w punktach granicznych, tj. dla $\lambda = 0$ oraz $\lambda = \infty$.

$$\lim_{\lambda\to 0} S_2(\lambda) = 0 \tag{4.69}$$

$$\lim_{\lambda\to\infty} S_2(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\omega}{|H(e^{j\omega})|^2} > 0 \tag{4.70}$$

$$\lim_{\lambda\to 0} A_2(\lambda) = 1 \tag{4.71}$$

$$\lim_{\lambda\to\infty} A_2(\lambda) = 0 \tag{4.72}$$

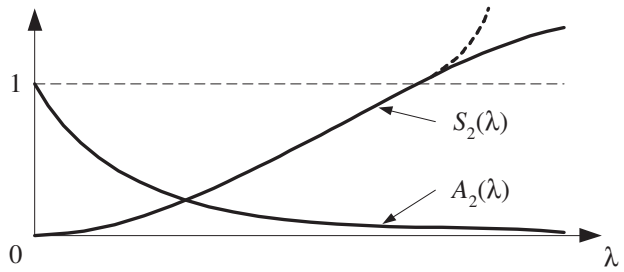
W drugim zadaniu optymalizacyjnym filtr quasi-odwrotny staje się idealnym filtrem korekcyjnym, kiedy wartość współczynnika λ dąży do nieskończoności. Również w tym przypadku można zauważyć, że jeśli układ korygowany posiada zera leżące bardzo blisko okręgu jednostkowego, to w mianowniku wzoru (4.70) pojawia się bardzo mała wartość, co pociąga za sobą znaczny wzrost wartości funkcji stabilności. W szczególności, gdy układ korygowany posiada bieguny leżące na okręgu jednostkowym

$$\lim_{\lambda\to\infty} S_2(\lambda) \to \infty \tag{4.73}$$

co oznacza, że idealny filtr korekcyjny nie jest stabilny asymptotycznie. Dobranie współczynnika λ o odpowiednio mniejszej wartości powoduje, że energia odpowiedzi impulsowej korekcyjnego filtru quasi-odwrotnego przyjmuje skończoną wartość. Dobór współczynnika λ o coraz mniejszych wartościach, prowadzi do coraz mniejszej energii jego odpowiedzi impulsowej, a więc do coraz lepszej stabilności. Polepszanie stabilności prowadzi jednak do pogorszenia się aproksymacji wypadkowego układu tożsamościowego, na co wskazuje zwiększająca się wartość funkcji aproksymacji.

Przykładowe przebiegi funkcji stabilności i aproksymacji dla drugiego zadania optymalizacyjnego pokazano na rys. 4.3. Również tutaj gruba, przerywana linia przedstawia przykładowy przebieg funkcji stabilizacji, gdy układ korygowany posiada zera leżące na okręgu jednostkowym.

Wniosek 4.2. *W każdym z dwóch rozpatrywanych zadań optymalizacyjnych, funkcje stabilności i aproksymacji wskazują na wzajemnie sprzeczne tendencje, tj. polepszenie stabilności prowadzi do pogorszenia aproksymacji i odwrotnie. Rozpatrywane funkcje mają jednak pewną zaletę – są monotoniczne. Dzięki temu równania (3.69) i (3.81) mają zawsze jedno i tylko jedno rozwiązanie optymalne.*



Rys. 4.3. Przykładowe wykresy funkcji stabilności $S_2(\lambda)$ i aproksymacji $A_2(\lambda)$ dla drugiego zadania optymalizacyjnego

4.4. Interpretacja rozwiązań zadań optymalizacyjnych w dziedzinie czasu

Przedstawione w poprzednim rozdziale rozwiązania (3.65) i (3.77) zadań optymalizacyjnych umożliwiają uzyskanie nie tylko transmitancji filtru quasi-odwrotnego lecz także pozwalają na projektowanie filtru korekcyjnego na podstawie znajomości odpowiedzi impulsowej układu zniekształcającego. Należy przy tym zauważyć, że dzięki zapisowi sygnałów w postaci wektorów, forma uzyskanych rozwiązań pozwala na ich bezpośrednią implementację numeryczną w postaci równania macierzowego. W wyniku takiego podejścia uzyskuje się odpowiedź impulsową filtru quasi-odwrotnego.

4.5. Przetwarzanie sygnałów w dziedzinie czasu

Korekcję zniekształconego sygnału, polegającą na przetwarzaniu nadchodzących na bieżąco próbek, wygodnie jest przeprowadzić w dziedzinie czasu. W tym celu wymagana jest jednak znajomość równań różnicowych opisujących zależność pomiędzy sygnałem wejściowym $\{x_n\}$ a wyjściowym $\{y_n\}$. Ze względu na fakt, iż uzyskany quasi-odwrotny filtr korekcyjny posiada strukturę układu typu NOI, wartość wyznaczanej próbki sygnału wyjściowego zależy nie tylko od próbek sygnału wejściowego, lecz także od próbek sygnału wyjściowego. Równania te będą miały więc postać rekurencyjną.

Drugim z możliwych rozwiązań jest przetwarzanie sygnału wejściowego przy wykorzystaniu odpowiedzi impulsowej. Uzyskanie odpowiedzi filtru na zadany sygnał możliwe jest wtedy przez zastosowanie operacji splotu. W znacznej mierze przypadków takie przetwarzanie sygnału uznawane jest za mało efektywne od strony numerycznej, gdyż wymaga przeważnie większej liczby operacji arytmetycznych, niż przy filtracji z wykorzystaniem równań różni-

cowych. Jednak w przypadku filtrów quasi-odwrotnych istnieje możliwość założenia energii sygnału odpowiedzi impulsowej poprzez odpowiedni dobór mnożnika λ. Dzięki temu wartości jej próbek już przy niewielkich wartościach indeksu mogą być bliskie zeru co powoduje, że wymagana liczba operacji mnożenia i dodawania będzie stosunkowo niewielka.

Ze względu na przynależność filtru quasi-odwrotnego do klasy układów nieprzyczynowych, ważnym zagadnieniem do rozpatrzenia staje się przetwarzanie sygnałów o bardzo długim lub nieskończonym czasie trwania. Dlatego w jednym z poniższych punktów rozważono ten problem bazując na rozwiązaniach stosowanych w filtrach NOI o zerowej charakterystyce fazowej.

4.5.1. Równania różnicowe dla filtrów prostych

Poszukiwane równania różnicowe mogą zostać wyznaczone bezpośrednio na podstawie transmitancji filtru uzyskanej w poprzednim punkcie. Przy przetwarzaniu sygnału przez filtr quasi-odwrotny, filtry proste występujące w części przyczynowej i antyprzyczynowej operują na tym samym sygnale wejściowym. W wyniku otrzymuje się jednak dwa różne sygnały wyjściowe. Zsumowanie odpowiadających sobie próbek tych sygnałów wyjściowych daje dopiero pełny sygnał wyjściowy filtru quasi-odwrotnego. Stąd ogólną postać transmitancji określonej wzorem (4.33) można przedstawić w następujący sposób

$$G_{\lambda 1}(z) = \sum_{i=1}^{P} \sum_{k=1}^{\sigma_i} \frac{Y^-(z)}{X(z)} + \sum_{i=1}^{P} \sum_{k=1}^{\sigma_i} \frac{Y^+(z)}{X(z)} \tag{4.74}$$

gdzie:

$X(z)$ – transformata $\mathcal{Z}$ sygnału wejściowego $\{x_n\}$,

$Y^-(z)$ – transformata $\mathcal{Z}$ sygnału wyjściowego $\{y_n^-\}$ z filtru prostego należącego do części antyprzyczynowej,

$Y^+(z)$ – transformata $\mathcal{Z}$ sygnału wyjściowego $\{y_n^+\}$ z filtru prostego należącego do części przyczynowej.

Pojedyncze bieguny zespolone

Porównanie wzoru (4.74) z (4.14) i (4.21) reprezentującymi składowe transmitancji $G_\lambda(z)$ filtru quasi-odwrotnego dla przypadku występowania tylko jednokrotnych biegunów zespolo-

nych, prowadzi do następujących zależności

$$\frac{Y^-(z)}{X(z)} = \frac{2\,\mathrm{Re}[a_i(p_i^{-1})]|p_i|^2 z^2 - 2\,\mathrm{Re}[a_i(p_i^{-1})p_i]z}{|p_i|^2 z^2 - 2\,\mathrm{Re}[p_i]z + 1} \tag{4.75}$$

$$\frac{Y^+(z)}{X(z)} = \frac{-2\,\mathrm{Re}[a_i(p_i)p_i^*]z^{-1} + 2\,\mathrm{Re}[a_i(p_i)]}{|p_i|^2 z^{-2} - 2\,\mathrm{Re}[p_i]z^{-1} + 1} \tag{4.76}$$

Wiedząc, że dla dowolnego sygnału $\{f_{n-m}\}$ opóźnionego o m chwil czasowych i dowolnego sygnału $\{f_{n+m}\}$ przyśpieszonego o m chwil czasowych zachodzą następujące zależności

$$\{f_{n-m}\} \leftrightarrow z^{-m}F(z), \quad m > 0 \tag{4.77}$$

$$\{f_{n+m}\} \leftrightarrow z^{m}F(z), \quad m > 0 \tag{4.78}$$

gdzie $F(z)$ jest transformatą $\mathcal{Z}$ sygnału $\{f_n\}$, równania różnicowe opisujące przetwarzanie sygnału wejściowego przez filtry proste w dziedzinie czasu przyjmują następujące postaci

$$y_n^-(p_i) = d_1^-(p_i)x_{n+1} + d_2^-(p_i)x_{n+2} - c_1(p_i)y_{n+1}^- - c_2(p_i)y_{n+2}^- \tag{4.79}$$

$$y_n^+(p_i) = d_0^+(p_i)x_n + d_1^+(p_i)x_{n-1} - c_1(p_i)y_{n-1}^+ - c_2(p_i)y_{n-2}^+ \tag{4.80}$$

Poszczególne współczynniki określone są zależnościami (4.81)-(4.86).

$$d_1^-(p_i) = -2\,\mathrm{Re}[a_i(p_i^{-1})p_i] \tag{4.81}$$

$$d_2^-(p_i) = 2\,\mathrm{Re}[a_i(p_i^{-1})]|p_i|^2 \tag{4.82}$$

$$d_0^+(p_i) = 2\,\mathrm{Re}[a_i(p_i)] \tag{4.83}$$

$$d_1^+(p_i) = -2\,\mathrm{Re}[a_i(p_i)p_i^*] \tag{4.84}$$

$$c_1(p_i) = -2\,\mathrm{Re}[p_i] \tag{4.85}$$

$$c_2(p_i) = |p_i|^2 \tag{4.86}$$

Rekurencyjne przetworzenie sygnału wejściowego przez każdy z filtrów prostych w wyniku zastosowania równań (4.79) i (4.80) prowadzi do powstania P sygnałów wyjściowych $\{y_n^+(p_i)\}$ w części przyczynowej i P sygnałów wyjściowych $\{y_n^-(p_i)\}$ w części antyprzyczynowej. Sygnał $\{y_n\}$ na wyjściu filtru otrzymuje się więc poprzez sumowanie odpowiadających sobie próbek z wszystkich $2P$ cząstkowych sygnałów wyjściowych

$$y_n = \sum_{i=1}^{P} y_n^-(p_i) + \sum_{i=1}^{P} y_n^+(p_i) \tag{4.87}$$

Wielokrotne bieguny zespolone

Dla przypadku występowania biegunów wielokrotnych, porównanie wzoru (4.33) z wzorem (4.74) prowadzi do następujących zależności

$$\frac{Y^-(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{q=0}^{k}(-1)^q\binom{k}{q}\left(a_{ik}(p_i^{-1})(p_i^*)^{-q} + a_{ik}^*(p_i^{-1})p_i^{-q}\right)z^{2k-q}}{\left(\left|p_i^{-1}\right|^2 - 2\,\mathrm{Re}[p_i^{-1}]z + z^2\right)^k} \tag{4.88}$$

$$\frac{Y^+(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{q=0}^{k}(-1)^q\binom{k}{q}\left(a_{ik}(p_i)(p_i^*)^{q} + a_{ik}^*(p_i)p_i^{q}\right)z^{-q}}{\left(1 - 2\,\mathrm{Re}[p_i]z^{-1} + |p_i|^2 z^{-2}\right)^k} \tag{4.89}$$

Stosując zależność (4.78), poszukiwane równanie różnicowe opisujące proces przetwarzania sygnału w dziedzinie czasu przez filtry proste występujące w części antyprzyczynowej można otrzymać bezpośrednio z zależności (4.88)

$$y_n^-(p_i,k) = \sum_{q=0}^{k} d_{2k-q}^-(p_i,k)x_{n+2k-q} - c_k^-(p_i,k)y_{n+k}^-(p_i,k) - c_{2k}^-(p_i,k)y_{n+2k}^-(p_i,k) \tag{4.90}$$

gdzie poszczególne współczynniki określają poniższe zależności.

$$d_{2k-q}^-(p_i,k) = (-1)^q\binom{k}{q}\left(a_{ik}(p_i^{-1})(p_i^*)^{-q} + a_{ik}^*(p_i^{-1})p_i^{-q}\right)\left|p_i^{-1}\right|^{-2k} \tag{4.91}$$

$$c_k^-(p_i,k) = \left(2\,\mathrm{Re}[p_i^{-1}]\right)^k\left|p_i^{-1}\right|^{-2k} \tag{4.92}$$

$$c_{2k}^-(p_i,k) = \left|p_i^{-1}\right|^{-2k} \tag{4.93}$$

Zastosowane oznaczenie $y_n^-(p_i,k)$ związane jest z faktem, iż współczynniki każdego filtru prostego, a zatem również wartości próbek jego odpowiedzi, zależą nie tylko od wartości bieguna p_i, lecz także od indeksu k związanego z jego krotnością σ_i.

Podobnie równanie różnicowe opisujące filtry proste występujące w części przyczynowej wynika z zależności (4.89), przyjmując postać

$$y_n^+(p_i,k) = \sum_{q=0}^{k} d_q^+(p_i,k)x_{n-q} - c_k^+(p_i,k)y_{n-k}^+(p_i,k) - c_{2k}^+(p_i,k)y_{n-2k}^+(p_i,k) \tag{4.94}$$

gdzie poszczególne współczynniki określone są poniższymi zależnościami.

$$d_q^+(p_i,k) = (-1)^q\binom{k}{q}\left(a_{ik}(p_i)(p_i^*)^{q} + a_{ik}^*(p_i)p_i^{q}\right) \tag{4.95}$$

$$c_k^+(p_i,k) = (2\,\mathrm{Re}[p_i])^k \tag{4.96}$$

$$c_{2k}^+(p_i,k) = |p_i|^{2k} \tag{4.97}$$

Tym razem liczba uzyskanych sygnałów wyjściowych podczas przeprowadzania procesu filtracji przez filtry proste wyznaczana jest jako suma krotności σ_i poszczególnych biegunów p_i w części przyczynowej oraz p_i^{-1} w antyprzyczynowej. Sumowanie odpowiadających sobie próbek poszczególnych sygnałów wyjściowych $\{y_n^-(p_i,k)\}$ i $\{y_n^+(p_i,k)\}$ prowadzi do uzyskania sygnału wypadkowego $\{y_n\}$ na wyjściu filtru

$$y_n = y_n^- + y_n^+ = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{\sigma_i} y_n^-(p_i,k) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{\sigma_i} y_n^+(p_i,k) \tag{4.98}$$

Przedstawiona w tym punkcie ogólna postać równań różnicowych wydaje się skomplikowana w przypadku konieczności zastosowania jej w praktyce. Jednak przy rozpatrywaniu konkretnego przypadku, funkcje transmitancji $G_\lambda^-(z)$ oraz $G_\lambda^+(z)$ będące składowymi transmitancji $G_\lambda(z)$ określonej wzorem (4.33) można przedstawić nie jako sumę funkcji wymiernych wyznaczanych dla poszczególnych biegunów, lecz doprowadzając do wspólnego mianownika, jako pojedyncze funkcje wymierne. Określenie równań różnicowych dopiero na ich podstawie, zapewni im prostszą postać, zmniejszając przy tym liczbę koniecznych do wykonania operacji arytmetycznych.

4.5.2. Przetwarzanie sygnałów o skończonym czasie trwania

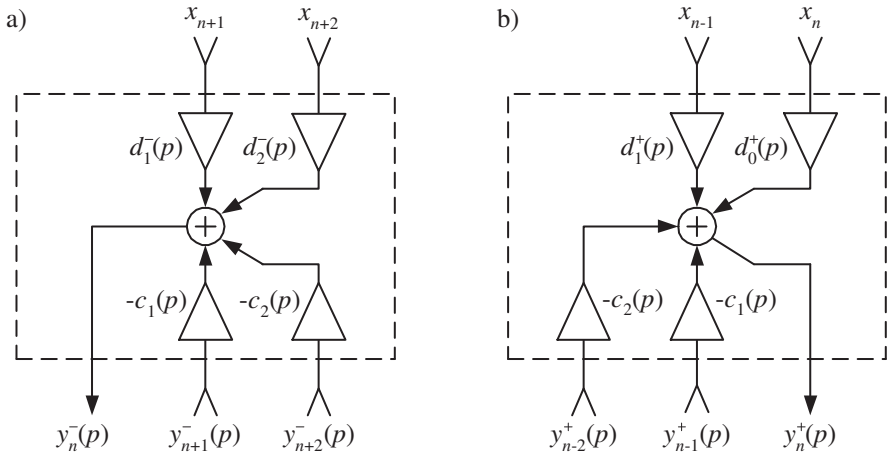
Filtracja przy wykorzystaniu równań różnicowych

Rozpatrzmy na prostym przykładzie proces przetwarzania sygnału wejściowego o liczbie M próbek przy wykorzystaniu uzyskanych równań różnicowych (4.79) i (4.80). Niech nieprzyczynowy filtr quasi-odwrotny posiada tylko jeden jednokrotny biegun p w obszarze ograniczonym przez oś odciętych i górną część okręgu jednostkowego[5]. W związku z tym w jego skład będzie wchodził jeden przyczynowy filtr prosty rzędu drugiego oraz jeden antyprzyczynowy również rzędu drugiego (rys. 4.4).

Przetwarzanie sygnału przez filtr przyczynowy jest ogólnie znanym procesem. Część przyczynowa filtru quasi-odwrotnego dokonuje więc filtracji sygnału wejściowego operując na aktualnej próbce wejściowej i przeszłych próbkach wejściowych i wyjściowych. Otrzymuje się w ten sposób kolejne próbki sygnału wyjściowego o rosnących wartościach indeksu n. W sposób obrazowy przedstawia to rys. 4.5.

Przetwarzanie sygnału przez filtr antyprzyczynowy wymaga znajomości wartości próbek wyjściowych o indeksach większych, niż indeks aktualnie wyznaczanej próbki. Filtracja sygna-

[5]Zgodnie z rozważaniami z punktu 4.1, całkowita liczba biegunów takiego filtru quasi-odwrotnego będzie równa 4.



Rys. 4.4. Wewnętrzne struktury filtrów prostych: a) antyprzyczynowego, b) przyczynowego, w filtrze quasi-odwrotnym dla biegunów jednokrotnych

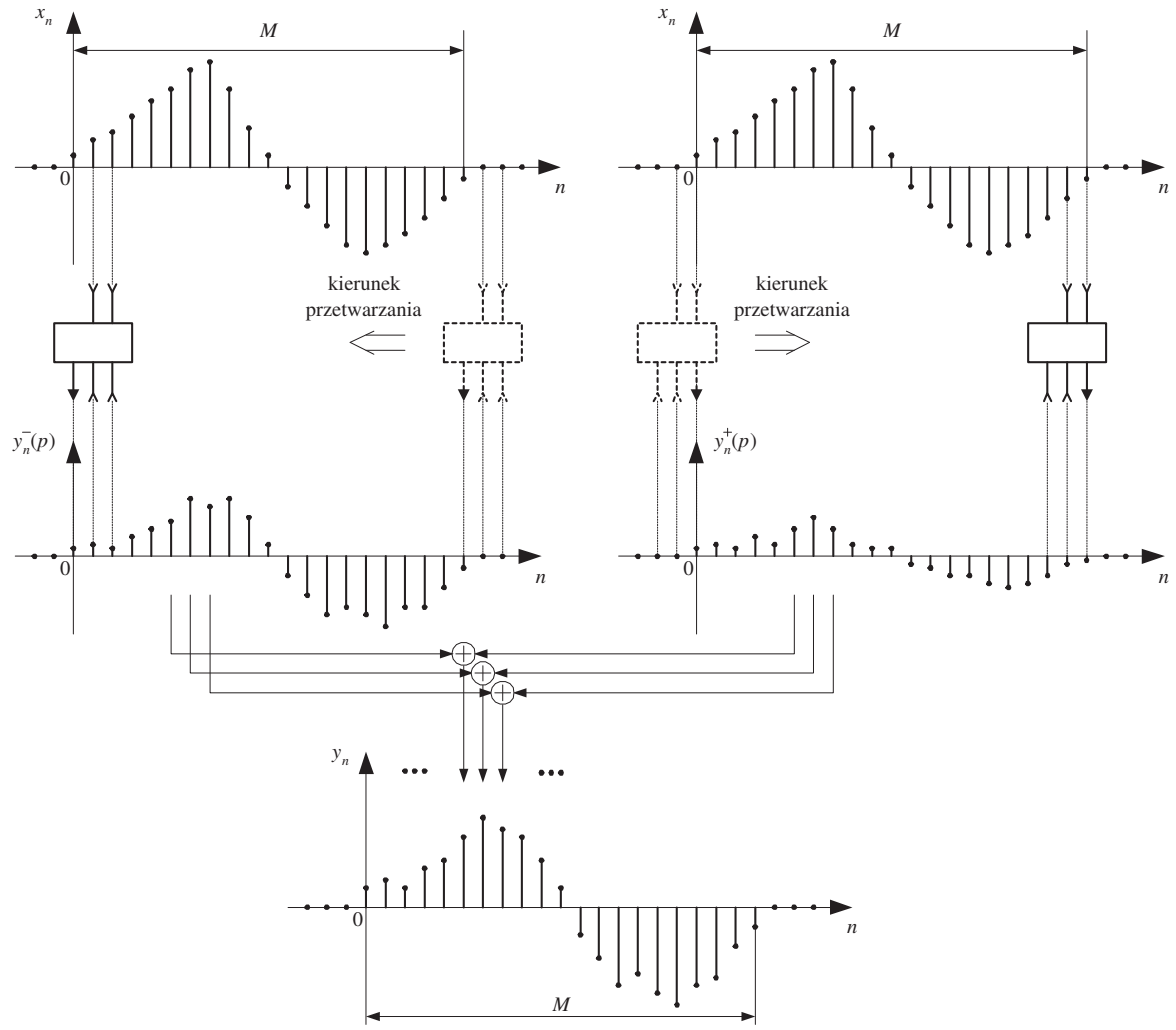
łu przez część antyprzyczynową filtru quasi-odwrotnego musi być więc realizowana w kierunku zmniejszających się indeksów przetwarzanego sygnału (rys. 4.5). Zastosowanie takiego samego kierunku przetwarzania sygnału jak w przypadku filtru przyczynowego spowodowałoby, iż przy wyznaczaniu aktualnej próbki sygnału wyjściowego, jego przyszłe próbki nie byłyby jeszcze znane.

Biorąc pod uwagę powyższe wnioski, równania (4.79) oraz (4.80) powinny być uzupełnione o granice zmian indeksu n, wyznaczając jednocześnie kierunek jego zmian. Jeśli zgodnie z poczynionym założeniem przetwarzany sygnał składa się z M próbek indeksowanych od 0 do $M-1$, to zakresy zmian indeksu n dla wspomnianych równań rekurencyjnych wynoszą odpowiednio

$$n = M-1, M-2, \ldots, 1, 0 \qquad \text{dla równania (4.79)} \tag{4.99}$$

$$n = 0, 1, \ldots, M-2, M-1 \qquad \text{dla równania (4.80)} \tag{4.100}$$

Ze względu na zerowe warunki początkowe w filtrach prostych na początku sygnału wyjściowego $\{y_n^+\}$ z przyczynowego filtru prostego, a na końcu sygnału wyjściowego $\{y_n^-\}$ z antyprzyczynowego filtru prostego powstają stany nieustalone. Należy więc zauważyć, że sumowanie obydwu odpowiedzi powoduje, że w całkowitej odpowiedzi $\{y_n\}$ filtru quasi-odwrotnego stany nieustalone wystąpią już na obu końcach.



Rys. 4.5. Filtracja sygnału o skończonym czasie trwania przez przyczynowy i antyprzyczynowy filtr prosty w filtrze quasi-odwrotnym

Filtracja przy wykorzystaniu odpowiedzi impulsowej

Znajomość odpowiedzi impulsowej $\{g_n\}$ filtru umożliwia uzyskanie sygnału odpowiedzi $\{y_n\}$ na dowolny sygnał wejściowy $\{x_n\}$ w wyniku przeprowadzenia operacji splotu, którą dla układu nieprzyczynowego można przedstawić wzorem

$$y_n = (g * x)_n = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g_{n-m} x_m, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{4.101}$$

W nieprzyczynowej odpowiedzi impulsowej wyróżnia się część przyczynową $\{g_n^+\}$ i anty-

przyczynową $\{g_n^-\}$, dlatego wzór (4.101) przyjmuje postać

$$y_n = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (g_{n-m}^- + g_{n-m}^+)x_m = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g_{n-m}^- x_m + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g_{n-m}^+ x_m \tag{4.102}$$

Dzieląc każdą z powyższych sum na dwie sumy względem aktualnie obliczanej n-tej próbki odpowiedzi filtru otrzymujemy

$$y_n = \sum_{m=-\infty}^{n} g_{n-m}^- x_m + \sum_{m=n+1}^{+\infty} g_{n-m}^- x_m + \sum_{m=-\infty}^{n} g_{n-m}^+ x_m + \sum_{m=n+1}^{+\infty} g_{n-m}^+ x_m \tag{4.103}$$

Pierwsza i czwarta suma we wzorze (4.103) przyjmują wartość zerową, tj.

$$\forall_{m\in(-\infty,n\rangle} \quad g_{n-m}^- = 0 \qquad \text{oraz} \qquad \forall_{m\in\langle n+1,+\infty)} \quad g_{n-m}^+ = 0 \tag{4.104}$$

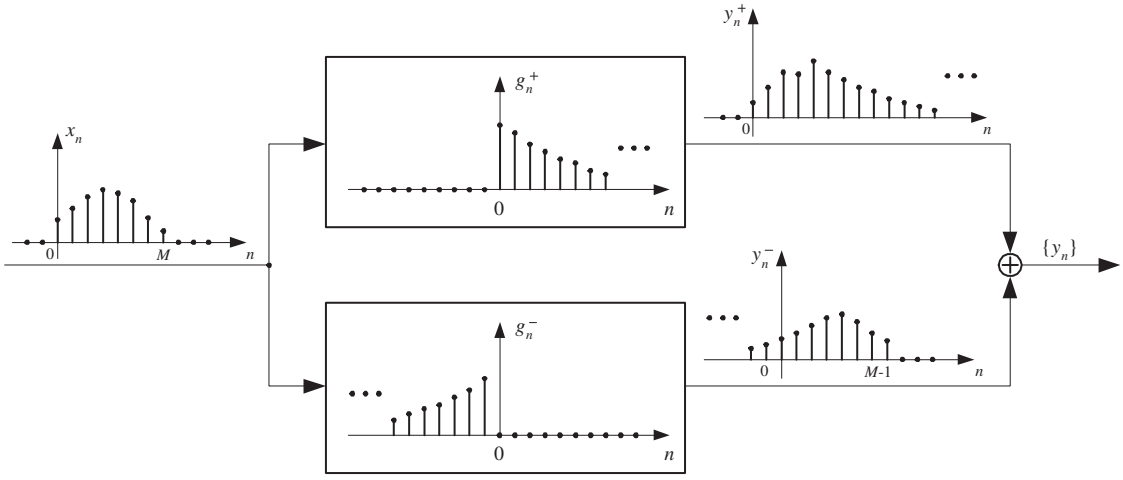
zatem wzór ten upraszcza się do postaci

$$\begin{aligned} y_n &= y_n^- + y_n^+ = (g^- * x)_n + (g^+ * x)_n = \\ &= \sum_{m=n+1}^{+\infty} g_{n-m}^- x_m + \sum_{m=-\infty}^{n} g_{n-m}^+ x_m \end{aligned} \tag{4.105}$$

Wzór określający splot liniowy sygnału wejściowego $\{x_n\}$ z odpowiedzią impulsową $\{g_n\}$ filtru quasi-odwrotnego można zatem zapisać w postaci określonej wzorem (4.105), gdzie kolejne próbki sygnału wyjściowego $\{y_n\}$ uzyskiwane są, jako suma splotów sygnału wejściowego z częścią przyczynową $\{g_n^+\}$ oraz antyprzyczynową $\{g_n^-\}$ odpowiedzi impulsowej układu. Wynikający z niego schemat przetwarzania sygnału wejściowego w dziedzinie czasu przedstawiono na rys. 4.6.

Wartość całkowita n jest indeksem aktualnie obliczanej próbki sygnału wyjściowego, a jednocześnie dzieli ciąg próbek sygnału wejściowego na dwie części. Niezerowe próbki na lewo od n wchodzą wraz z nią w splot z przyczynową częścią odpowiedzi impulsowej, natomiast próbki wejściowe na prawo od n wchodzą w splot z częścią antyprzyczynową odpowiedzi impulsowej. Ostatecznie sygnał wyjściowy $\{y_n\}$ otrzymuje się przez sumowanie odpowiadających sobie próbek odpowiedzi częściowych $\{y_n^-\}$ i $\{y_n^+\}$.

O ile realizacja splotu z przyczynową częścią odpowiedzi impulsowej bazuje na przeszłych próbkach sygnału wejściowego, o tyle do realizacji splotu antyprzyczynowego konieczna jest znajomość próbek sygnału wejściowego o indeksach większych, niż indeks aktualnie wyznaczanej próbki, a więc konieczna jest znajomość próbek z „przyszłości". W przypadku filtrów cyfrowych ta niedogodność nie stanowi problemu, gdyż sygnał wejściowy może być wcześniej zapamiętany.



Rys. 4.6. Filtracja sygnału o skończonym czasie trwania przy wykorzystaniu nieprzyczynowej odpowiedzi impulsowej filtru quasi-odwrotnego

Zakładając, że rozpatrywany filtr quasi-odwrotny przedstawiany w formie równoległego połączenia części przyczynowej i antyprzyczynowej jest układem stabilnym, zarówno część przyczynowa jak i antyprzycznowa jego odpowiedzi impulsowej jest gasnąca. Ze względu na tą właściwość można przyjąć, że odpowiedź impulsowa ma praktycznie skończony czas trwania, ponieważ od pewnej wartości indeksu wartości jej próbek, zarówno dla części przyczynowej jak i antyprzyczynowej, są mniejsze, niż rozdzielczość wynikająca z zastosowanej arytmetyki [49]. W praktyce umożliwia to jej obcięcie od strony indeksów ujemnych oraz dodatnich i filtrację sygnału wejściowego z możliwym do przyjęcia błędem.

Innym kryterium umożliwiającym zamianę nieskończonej odpowiedzi impulsowej na odpowiedź o skończonym czasie trwania może być ilość energii, która ma być zachowana po obcięciu odpowiedzi impulsowej filtru quasi-odwrotnego. Zaletą takiego podejścia jest możliwość wyznaczenia całkowitej energii zarówno w dziedzinie czasu jak i częstotliwości dzięki twierdzeniu Parsevala. Algorytm wyznaczania numeru próbki odpowiedzi impulsowej, od której nastąpi jej ucięcie przy zachowaniu energii na poziomie $P\%$ przedstawiono w pracy [33]. Należy jednak zauważyć, iż ze względu na nieprzyczynowość odpowiedzi impulsowej filtru quasi-odwrotnego, algorytm ten powinien być stosowany osobno dla części przyczynowej i antyprzyczynowej.

Biorąc pod uwagę powyższe wnioski, przebiegi sum od $-\infty$ oraz do $+\infty$ we wzorze (4.105)

mogą zostać w praktyce zamienione na sumy indeksowane skończoną liczbą wartości, tj.[6]

$$o_n = \sum_{m=n+1}^{-K^-+n} x^-_{n-m} i_m + \sum_{m=-K^++n}^{n} x^+_{n-m} i_m, \quad n = 0, 1, 2 \ldots \tag{4.106}$$

gdzie: K^-– minimalny indeks próbki w części antyprzyczynowej odpowiedzi impulsowej[7],
K^+– maksymalny indeks próbki w części przyczynowej odpowiedzi impulsowej[8].

4.5.3. Filtracja sygnałów o nieskończonym czasie trwania

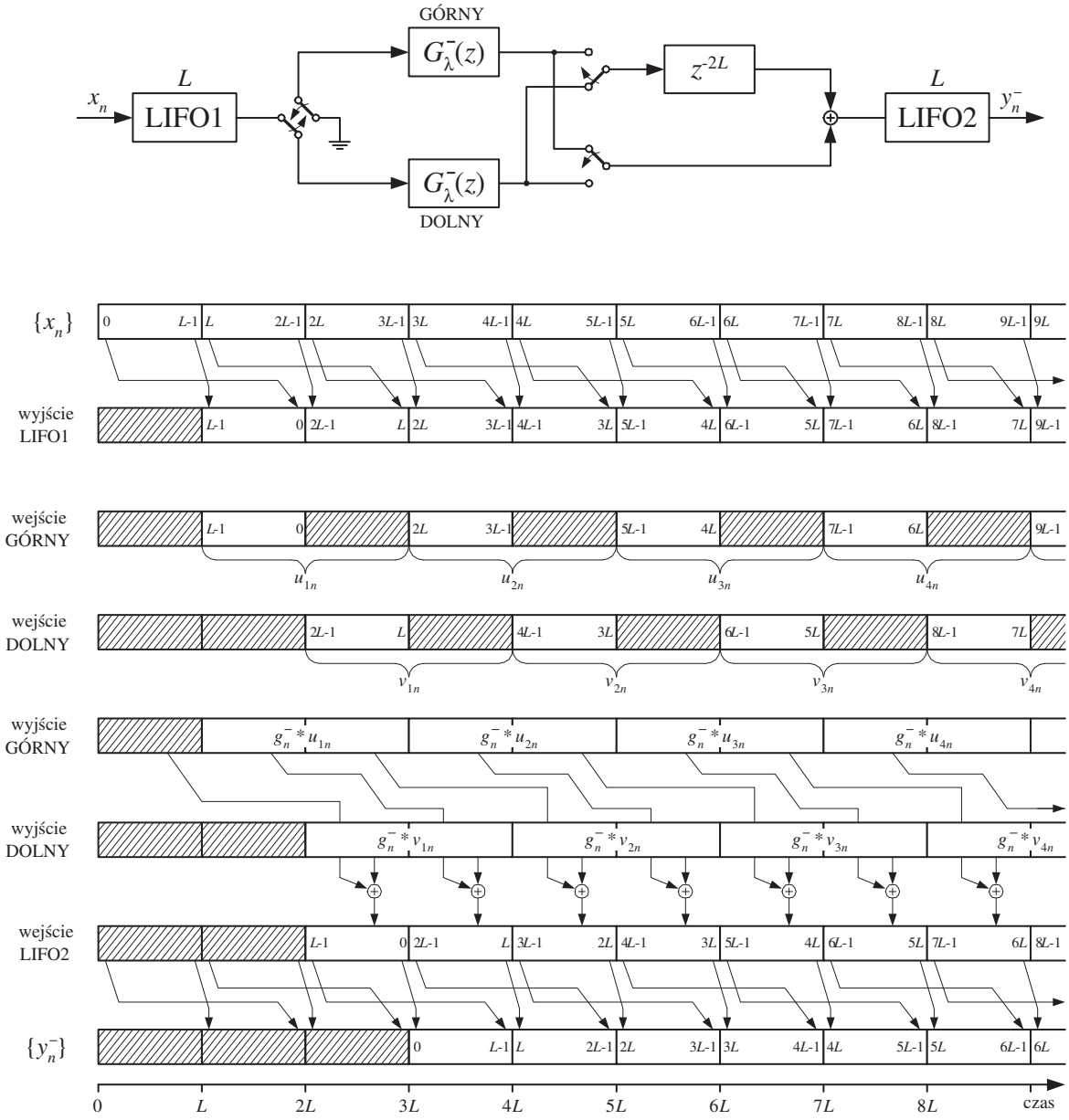
W praktyce bardzo często przetwarzane są sygnały przyczynowe o nieskończonym lub co najmniej bardzo długim czasie trwania. Jak można się zorientować z poprzedniego punktu poprawna filtracja sygnału przez układ antyprzyczynowy wymaga przetwarzania go od końca w kierunku próbek o malejących indeksach, jak pokazano na rys. 4.5. Stąd główny problem przy przetwarzaniu sygnałów o nieskończonym czasie trwania przez układy nieprzyczynowe stanowi część antyprzyczynowa.

W wielu pracach opisujących teorię przetwarzania sygnałów [45, 47, 62] przedstawiane jest sekcjonowane przetwarzanie sygnałów o długim czasie trwania w porównaniu z czasem trwania odpowiedzi impulsowej filtru. Rozróżnia się przy tym dwie metody: *overlap-add* i *overlap-save*. Na bazie pierwszej z nich w pracy [49] przedstawiono efektywną koncepcję przetwarzania sygnałów przez układy antyprzyczynowe sukcesywnie rozwijaną w pracach [59, 14, 32, 1]. Schemat przetwarzania (rys.4.7) opiera się na zastosowaniu dwóch rejestrów LIFO o pojemnościach odpowiadających przyjętej długości L sekcji. Po zmagazynowaniu w takim rejestrze próbek jednej sekcji następuje ich „obrót", tzn. wejścia rejestrów stają się wyjściami i odwrotnie. Zatem kolejne wchodzące próbki powodują wypychanie zmagazynowanych próbek, jednak już w odwrotnej kolejności. Próbki z poszczególnych sekcji są przetwarzanie przez jeden z dwóch identycznych układów antyprzyczynowych, przy czym przesyłanie kolejnych sekcji do poszczególnych układów jest realizowane naprzemiennie. Zastosowanie bloku opóźniającego o dwukrotnie większym rozmiarze niż przyjęta długość sekcji zapewnia poprawne sumowanie próbek z dwóch bezpośrednio następujących po sobie sekcji. Użycie dwóch rejestrów LIFO oraz bloku opóźniającego powoduje całkowite opóźnienie sygnału wyjściowego w stosunku do wejściowego o trzykrotną wartość przyjętej długości sekcji. Stąd w przykładowych wykresach czasowych przedstawionych na rys. 4.7, sekcje oznaczone zakreskowanymi blokami

[6] Biorąc pod uwagę fakt, iż w rzeczywistości przetwarzane są tylko sygnały przyczynowe, zrezygnowano z ujemnych wartości indeksu n.

[7] Wartość indeksu K^- jest zawsze ujemna.

[8] Wartość indeksu K^+ jest zawsze dodatnia.



Rys. 4.7. Schemat realizacji przetwarzania sekcjonowanego przez układ antyprzyczynowy i przykładowe wykresy czasowe [32]

składają się z próbek o wartościach zerowych. Zaprezentowaną koncepcję zastosowano przy przeprowadzaniu symulacji przedstawionych w kolejnym rozdziale.

Ważnym zagadnieniem w przedstawionej metodzie jest odpowiedni dobór długości sekcji w stosunku do długości odpowiedzi impulsowej filtru antyprzyczynowego. W sposób kompleksowy przedstawiono to zagadnienie w pracy [34].

5. Przykłady symulacyjne

Dla poparcia przedstawionych w niniejszej pracy teorii związanej z projektowaniem stabilnych, korekcyjnych filtrów quasi-odwrotnych, rozpatrzono kilka przykładów numerycznych. W prezentowanych przykładach jako układy zniekształcające przyjęto zarówno układy o transmitancji wielomianowej, jak również wymiernej. W każdym z przykładów starano się potwierdzić różne aspekty teoretyczne przedstawione w poprzednich rozdziałach pracy.

W niniejszym rozdziale zamieszczono również praktyczne wzory umożliwiające wyznaczenie mnożnika λ dla obydwu zadań optymalizacyjnych oraz przeanalizowano zbieżność proponowanego algorytmu.

5.1. Numeryczne wyznaczanie wartości mnożnika λ

Wzory zaprezentowane w rozdziale 4. opisują całą λ-rodzinę filtrów quasi-odwrotnych, gdzie wartości współczynników filtru są uzależnione od wartości mnożnika λ. W praktyce poszukiwany jest tylko jeden optymalny filtr korekcyjny, który spełnia założone ograniczenie dotyczące wskaźnika stabilności (pierwsze zadanie optymalizacyjne) lub wskaźnika aproksymacji (drugie zadanie optymalizacyjne). Zatem wyznaczenie współczynników optymalnego quasi-odwrotnego filtru korekcyjnego wymaga wyznaczenie wartości λ_* mnożnika λ poprzez rozwiązania równania (3.69) lub (3.81) w zależności od stosowania jednego z dwóch uzyskanych rozwiązań.

Każde z powyższych równań można przedstawić w innej, równoważnej postaci

$$S_1(\lambda) - q_1 = 0 \tag{5.1}$$

$$A_2(\lambda) - q_2 = 0 \tag{5.2}$$

która sugeruje, iż poszukiwanie wartości λ_* mnożnika odpowiadającej zadanej wartości wskaźnika q, można sprowadzić do procesu poszukiwania miejsc zerowych funkcji $S_1(\lambda) - q_1$ lub

$A_2(\lambda) - q_2$ w zależności od rozpatrywanego zadania optymalizacyjnego. Ze względu na monotoniczny przebieg funkcji $S_1(\lambda)$ oraz $A_2(\lambda)$ przy $\lambda \geqslant 0$, równania (5.1) i (5.2) posiadają jedno i tylko jedno rozwiązanie[1].

Jedną z efektywniejszych i najczęściej stosowanych metod poszukiwania pierwiastków równania postaci

$$N(\lambda) = 0 \tag{5.3}$$

gdzie w zależności od rozpatrywanego zadania optymalizacyjnego

$$N(\lambda) = S_1(\lambda) - q_1 \qquad \text{lub} \qquad N(\lambda) = A_2(\lambda) - q_2 \tag{5.4}$$

jest metoda Newtona [53], w której rozwiązania λ_* poszukuje się w sposób iteracyjny korzystając z zależności[2]

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n - \frac{N(\lambda_n)}{N'(\lambda_n)} \tag{5.5}$$

aż do momentu spełnienia warunku

$$|\lambda_{n+1} - \lambda_n| < \varepsilon \tag{5.6}$$

w którym ε jest dopuszczalnym błędem wyznaczenia wartości λ_*.

Przy zastosowaniu powyższej metody, wzory służące do wyznaczania wartości λ_* dla zadanej wartości współczynnika q przyjmą postać:

- dla pierwszego zadania optymalizacyjnego

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n - \frac{S_1(\lambda_n) - q_1}{S_1'(\lambda_n)} \tag{5.7}$$

- dla drugiego zadania optymalizacyjnego

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n - \frac{A_2(\lambda_n) - q_2}{A_2'(\lambda_n)} \tag{5.8}$$

W celu pokazania, iż zastosowana procedura Newtona jest zbieżna, przeprowadzono badanie przedziałów monotoniczności prawych stron wyrażeń (5.7) i (5.8) oznaczając je odpowiednio jako funkcje $\Gamma_S(\lambda)$ i $\Gamma_A(\lambda)$. Ich pierwsze pochodne wynoszą

$$\begin{aligned} \Gamma_S'(\lambda) &= 1 - \frac{(S_1'(\lambda))^2 - (S_1(\lambda) - q_1)S_1''(\lambda)}{(S_1'(\lambda))^2} = \\ &= (S_1(\lambda) - q_1)\frac{S_1''(\lambda)}{(S_1'(\lambda))^2} \end{aligned} \tag{5.9}$$

[1] Patrz wniosek 4.2 na stronie 58.

[2] Zastosowany we wzorze indeks dolny n oznacza numer iteracji, z której pochodzi wyznaczona wartość mnożnika λ.

$$\begin{aligned}\Gamma_A^{'}(\lambda) &= 1 - \frac{(A_2^{'}(\lambda))^2 - (A_2(\lambda) - q_2)A_2^{''}(\lambda)}{(A_2^{'}(\lambda))^2} = \\ &= (A_2(\lambda) - q_2)\frac{A_2^{''}(\lambda)}{(A_2^{'}(\lambda))^2} \end{aligned} \tag{5.10}$$

Pierwsze pochodne funkcji $S_1(\lambda)$ oraz $A_2(\lambda)$ zostały już wyznaczone i oszacowane w punkcie 4.3. Zatem do określenie przedziałów monotoniczności funkcji $\Gamma_S^{'}(\lambda)$ i $\Gamma_A^{'}(\lambda)$ wystarczy wyznaczyć i oszacować wartości drugich pochodnych funkcji $S_1(\lambda)$ i $A_2(\lambda)$, które wynoszą odpowiednio

$$\begin{aligned} S_1^{''}(\lambda) &= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{-2|H(e^{j\omega})|^2\, 3\left(\lambda + |H(e^{j\omega})|^2\right)^2}{\left(\lambda + |H(e^{j\omega})|^2\right)^6}\, d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{6|H(e^{j\omega})|^2}{\left(\lambda + |H(e^{j\omega})|^2\right)^4}\, d\omega > 0 \qquad \forall_{\lambda \geqslant 0} \end{aligned} \tag{5.11}$$

$$\begin{aligned} A_2^{''}(\lambda) &= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{-2|H(e^{j\omega})|^2\, 3\left(1 + \lambda|H(e^{j\omega})|^2\right)^2 |H(e^{j\omega})|^2}{\left(1 + \lambda|H(e^{j\omega})|^2\right)^6}\, d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{6|H(e^{j\omega})|^4}{\left(1 + \lambda|H(e^{j\omega})|^2\right)^4}\, d\omega > 0 \qquad \forall_{\lambda \geqslant 0} \end{aligned} \tag{5.12}$$

Ponieważ dla każdego $\lambda \geqslant 0$

$$\frac{S_1^{''}(\lambda)}{(S_1^{'}(\lambda))^2} > 0 \tag{5.13}$$

jak również

$$\frac{A_2^{''}(\lambda)}{(A_2^{'}(\lambda))^2} > 0 \tag{5.14}$$

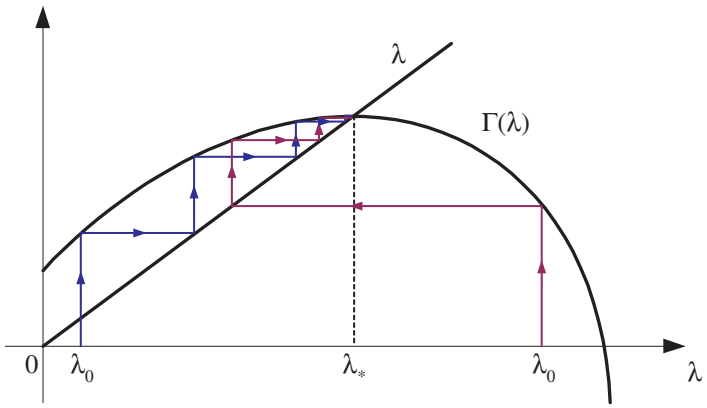
więc wartość pierwszej pochodnej zarówno funkcji $\Gamma_S(\lambda)$ jak i $\Gamma_A(\lambda)$ zależy wyłącznie odpowiednio od wartości czynnika $S_1(\lambda) - q_1$ lub $A_2(\lambda) - q_2$. Funkcja stabilności $S_1(\lambda)$ jest malejąca, więc jeśli $\lambda < \lambda_*$, to wartość funkcji $S_1(\lambda) > q_1$. Zatem

$$\forall_{\lambda < \lambda_*} \quad \Gamma_S^{'}(\lambda) > 0 \tag{5.15}$$

Podobnie, jeśli $\lambda > \lambda_*$, to $S_1(\lambda) < q_1$, więc

$$\forall_{\lambda > \lambda_*} \quad \Gamma_S^{'}(\lambda) < 0 \tag{5.16}$$

Funkcja $\Gamma_S(\lambda)$ posiada więc maksimum w punkcie λ_*, co czyni zastosowaną procedurę Newtona zbieżną. Jej przebieg w postaci graficznej pokazano na rys. 5.1.

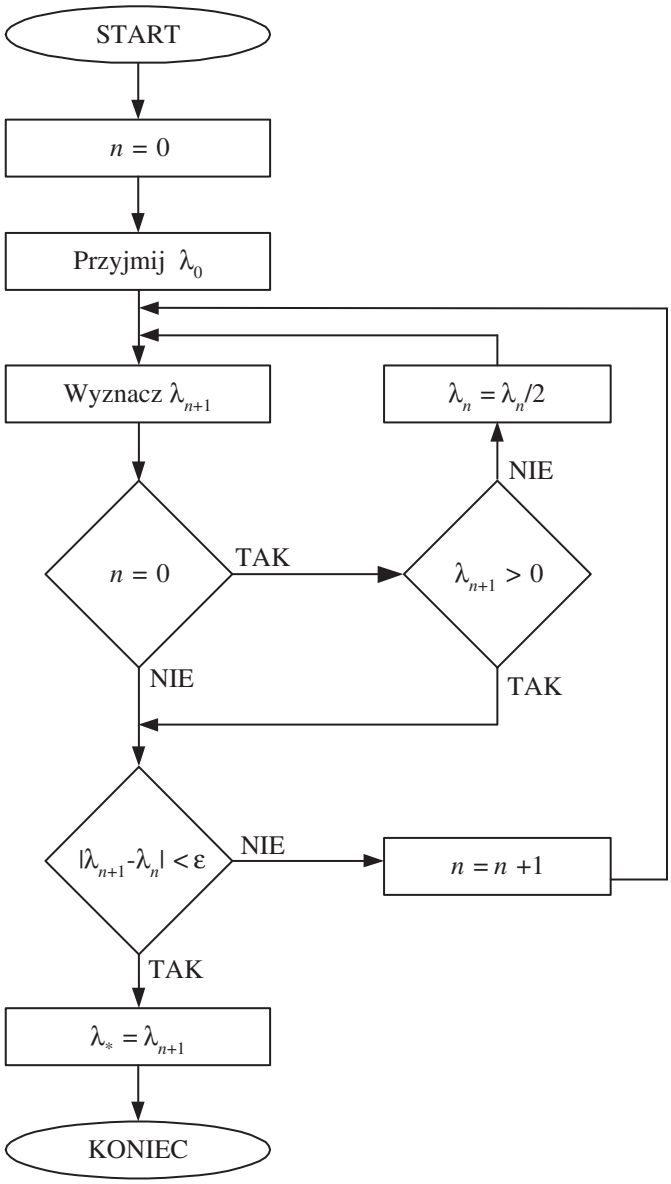


Rys. 5.1. Graficzna reprezentacja wyznaczania wartości λ_* mnożnika λ dla założonej wartości współczynnika q przy różnych wartościach początkowych

Funkcja $A_2(\lambda)$ jest również malejąca, dlatego rozpatrzenie monotoniczności funkcji $\Gamma'_A(\lambda)$ przebiega w identyczny sposób prowadząc do podobnego wniosku, że funkcja $\Gamma_A(\lambda)$ posiada maksimum w punkcie λ_*.

Przed rozpoczęciem wykonywania procedury wyznaczania wartości mnożnika λ, wymagane jest przyjęcie jego początkowej wartości. Dobranie zbyt dużej wartości λ_0 może spowodować, że $\Gamma(\lambda_0) < 0$, gdyż funkcja $\Gamma(\lambda)$ jest malejąca dla $\lambda > \lambda_*$. Zarówno funkcja $S_1(\lambda)$ jak i $A_2(\lambda)$ są określone dla $\lambda \geqslant 0$. Stąd kolejne iteracje dla rozpatrywanego przypadku mogą przebiegać niepoprawnie. Dlatego przed rozpoczęciem właściwej procedury wyznaczania λ_* należy sprawdzić, czy $\Gamma(\lambda_0) > 0$. Jeśli nie, to przyjęte λ_0 należy sukcesywnie zmniejszać o połowę, aż do spełnienia powyższego warunku. Innym rozwiązaniem może być wcześniejsze wykreślenie funkcji $S_1(\lambda)$ lub $A_2(\lambda)$ i graficzne odczytanie przybliżonej wartości mnożnika λ odpowiadającej założonej wartości współczynnika q, a następnie przyjęcie jej jako wartości początkowej dla procedury wyznaczania λ_*. Przyjęcie $\lambda_0 = 0$ również zapewnia poprawne wykonywanie kolejnych iteracji.

Pełną procedurę mająca na celu wyznaczenie wartości λ_* mnożnika λ przy założonej wartości współczynnika q przedstawiono algorytmicznie na rys. 5.2.



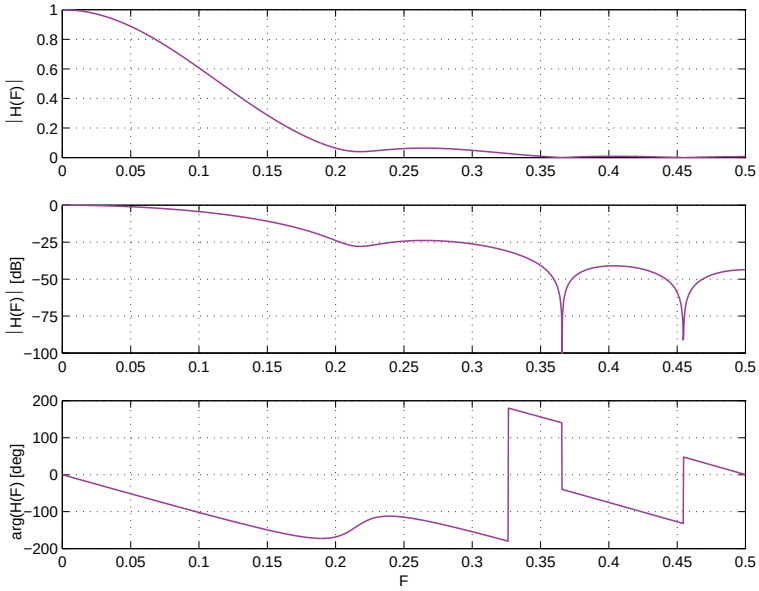
Rys. 5.2. Algorytm wyznaczania wartości λ_* mnożnika λ dla założonej wartości współczynnika q

5.2. Przykład 1

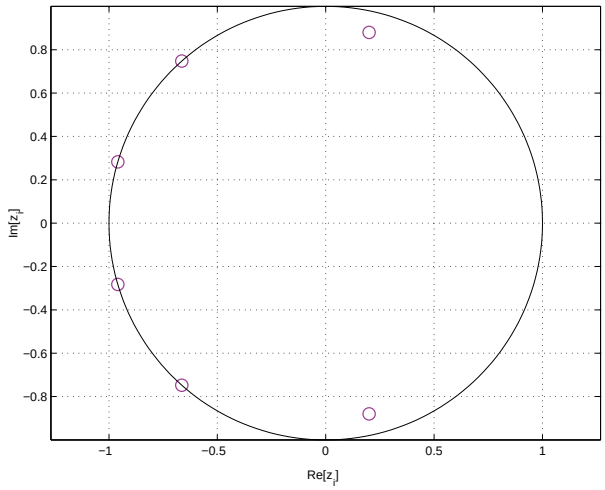
W pierwszym przykładzie prezentującym możliwość korekcji zniekształconego sygnału w wynku zastosowania filtru quasi-odwrotnego, jako hipotetyczny układ zniekształcający przyjęto układ o modelu matematycznym odwzorowanym przez transmitancję w postaci wielomianowej. Na rys. 5.3 przedstawiono jego charakterystyki częstotliwościowe[3]. Rozkład zer (rys. 5.4) dobrano tak, aby część z nich występowała na okręgu jednostkowym, zaś pozostałe leża-

[3] F oznacza częstotliwość znormalizowaną względem częstotliwości próbkowania, tj. $F = f/f_p$

ły w jego bliskiej odległości tworząc szerokie pasmo zaporowe w stosunku do całego zakresu przetwarzanych częstotliwości[4]. W efekcie uzyskano układ, który przenosi bez zniekształceń tylko składową stałą przetwarzanego sygnału.



Rys. 5.3. Charakterystyki częstotliwościowe układu zniekształcającego



i	$\mathrm{Re}[z_i]$	$\mathrm{Im}[z_i]$	$\lvert z_i \rvert$
1	0,2000	0,8800	0,9024
2	0,2000	−0,8800	0,9024
3	−0,6640	0,7477	1,0000
4	−0,6640	−0,7477	1,0000
5	−0,9592	0,2829	1,0000
6	−0,9592	−0,2829	1,0000

Rys. 5.4. Rozkład zer układu zniekształcającego

[4]W tablicy przy rys. 5.4 dodatkow prezentowane są dokładne wartości tychże zer.

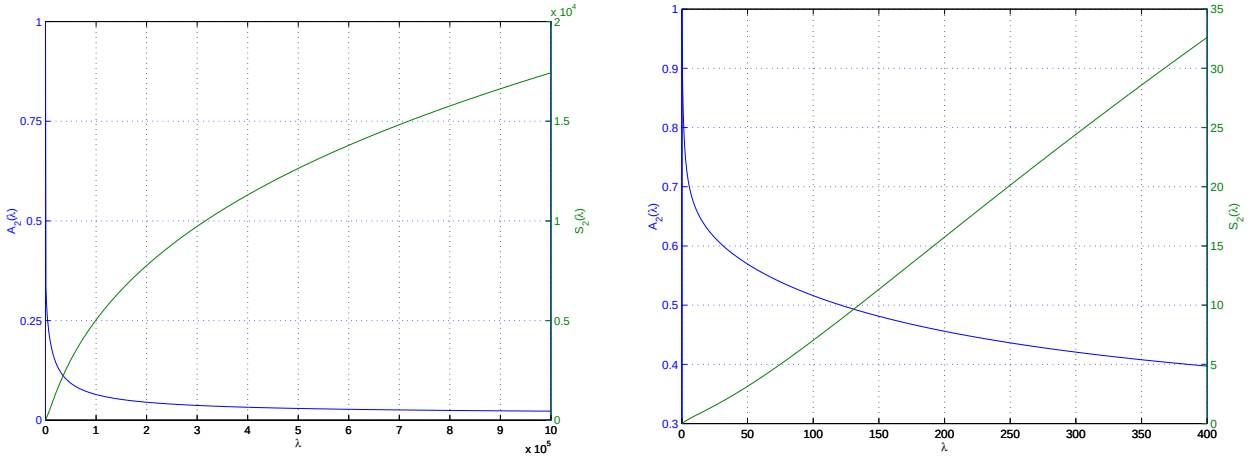
Projektując dla rozpatrywanego układu zniekształcającego filtr korekcyjny jako jego idealną odwrotność uzyskuje się układ niestabilny w sensie BIBO niezależnie od tego, czy jest on traktowany jako układ przyczynowy, czy też nieprzyczynowy. Spowodowane jest to faktem, iż część zer układu podlegającego korekcji leży na okręgu jednostkowym.

W celu uzyskania stabilnego filtru korekcyjnego, można posłużyć się teorią przedstawioną w niniejszej pracy i zastosować do korekcji filtr quasi-odwrotny. W pierwszej kolejności należy zdecydować się, które z kryteriów (stabilności czy aproksymacji) przyjmie założoną wartość, a które będzie minimalizowane w celu uzyskania rozwiązania optymalnego. W przypadku zakładania wskaźnika aproksymacji, co uczyniono w niniejszym przykładzie, należy korzystać z wzorów uzyskanych dla drugiego zadania optymalizacyjnego.

Procentowy poziom aproksymacji PA_2 układu tożsamościowego przez układ wypadkowy związany z drugim zadaniem optymalizacyjnym można określić posługując się wzorem

$$PA_2 = (1 - q_2)100 \tag{5.17}$$

Wtedy aproksymację układu tożsamościowego na poziomie 100% uzyskuje się dla $q_2 = 0$, natomiast przyjęcie $q_2 = 1$ daje aproksymację na poziomie 0%.

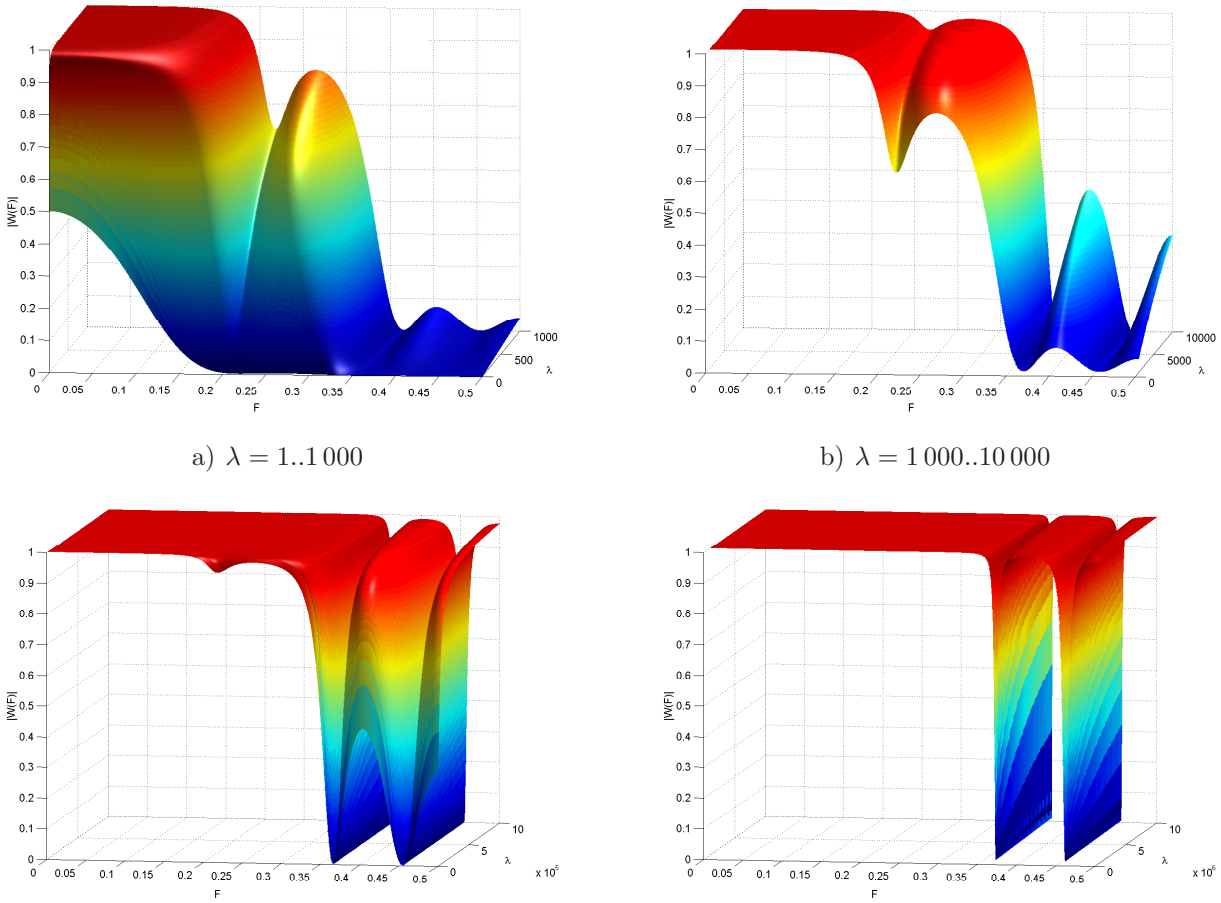


a) $\lambda = 0..10^6$ b) $\lambda = 0..400$

Rys. 5.5. Wykresy funkcji stabilności $S_2(\lambda)$ i aproksymacji $A_2(\lambda)$

Wykreślając funkcje aproksymacji $A_2(\lambda)$ i stabilności $S_2(\lambda)$ (rys. 5.5) uzyskuje się przybliżone spojrzenie na możliwości korekcji związane z danym układem zniekształcającym. Otrzymane przebiegi funkcji są zgodne z wykresami uzyskanymi w punkcie 4.3.2, co potwierdza poprawność przeprowadzonych analiz. Zgodnie ze wzorem (3.81) w drugim zadaniu optymalizacyjnym wartość funkcji aproksymacji $A_2(\lambda)$ reprezentuje wartość przyjmowanego wskaźnika aproksymacji q_2.

Jak widać, osiągnięcie lepszego poziomu aproksymacji od wybranego, tj. zmniejszenie przyjętej wartości wskaźnika q_2, wiąże się zawsze z pogorszeniem stabilności filtru. Wskazuje na to przebieg funkcji stabilności $S_2(\lambda)$, która reprezentuje energię odpowiedzi impulsowej filtru quasi-odwrotnego. Przy zwiększaniu poziomu aproksymacji zwiększa ona swoją wartość (rys. 5.5). To zwiększenie energii przekłada się zarówno na zwiększenie amplitud poszczególnych próbek odpowiedzi impulsowej, jak również na wydłużenie czasu jej trwania, co zostanie przedstawione w dalszej części niniejszego przykładu.



a) $\lambda = 1..1\,000$

b) $\lambda = 1\,000..10\,000$

c) $\lambda = 10\,000..1\,000\,000$

d) $\lambda = 1\,000\,000..10\,000\,000$

Rys. 5.6. Charakterystyki częstotliwościowe amplitudowe $|W(F)|$ układu wypadkowego uzyskane dla różnych wartości mnożnika λ

W celu obrazowego pokazania zmian charakterystyk częstotliwościowych amplitudowych układu wypadkowego dla szerokiego zakresu zmian wskaźnika q_2, na rys. 5.6 dokonano ich prezentacji w formie wykresów trójwymiarowych. Przy bardzo małych wartościach λ w granicach 0..50 (rys. 5.6a) powstaje układ wypadkowy, który wręcz powoduje dodatkowe zniekształcenie

przetwarzanego sygnału. Wynika to niejako ze źle postawionych wymagań dla filtru korekcyjnego. Mianowicie małe wartości λ w drugim zadaniu optymalizacyjnym uzyskuje się dla dużych wartości współczynnika q_2, a to z kolei wiąże się z aproksymacją idealnego układu tożsamościowego na poziomie kilku procent.

Dalsze zwiększanie wartości mnożnika λ prowadzi do korekcji w coraz szerszym zakresie częstotliwości. Przy bardzo dużych wartościach λ (rzędu 10^8), korekcja występuje prawie w całym zakresie przetwarzanych częstotliwości za wyjątkiem punktów, na które duży wpływ mają zera układu zniekształcającego leżące na okręgu jednostkowym. Niestety tak dobre wypadkowe charakterystyki amplitudowe okupione są zawsze rozkładem biegunów filtru quasi-odwrotnego zbliżonym do rozkładu, jaki posiada idealna odwrotność układu zniekształcającego.

Poniżej przeanalizowano przypadki dla dwóch wybranych wartości wskaźnika aproksymacji q_2. W tablicy 5.1 zebrano odpowiadające im wartości mnożnika λ wyznaczone numerycznie przy wykorzystaniu metody przedstawionej w punkcie 5.1.

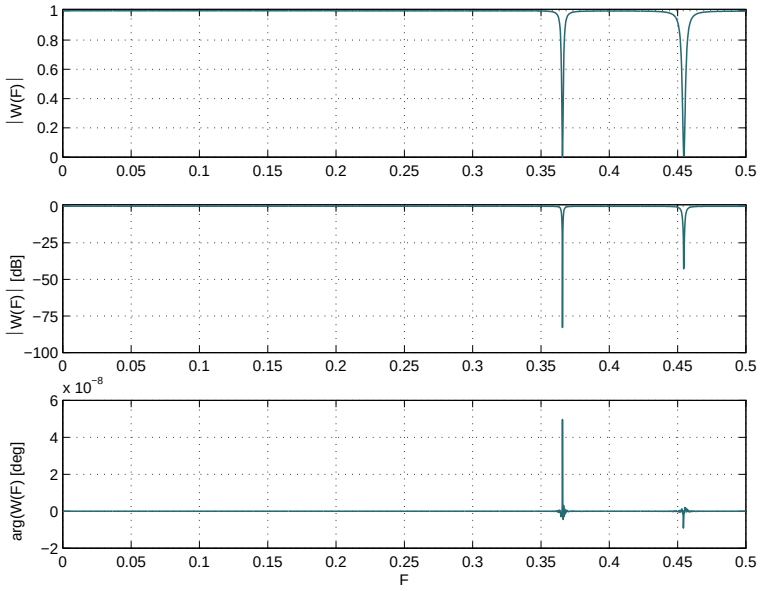
Tablica 5.1. Przyjęte wartości wskaźnika q_2 oraz odpowiadające im poziomy aproksymacji PA_2 i wartości mnożnika λ

q_2	PA_2	λ
0,01	99%	9501740
0,03	97%	485701

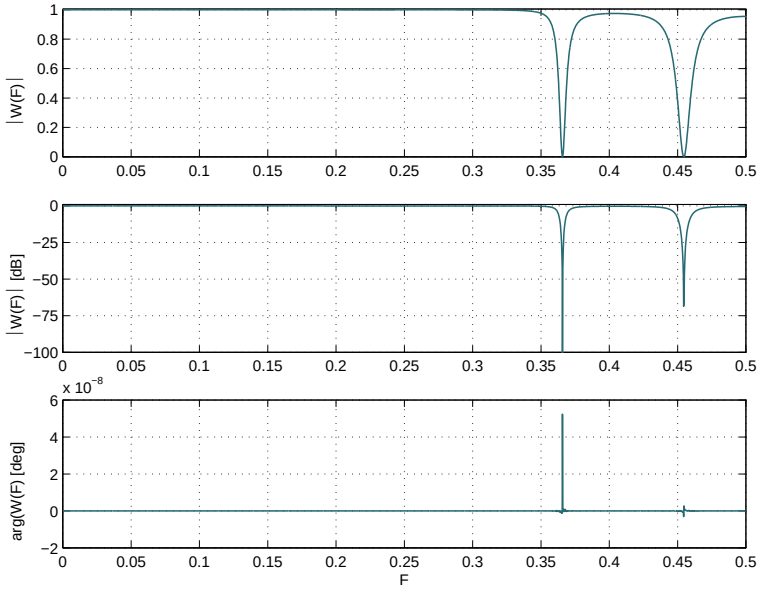
Przyjęcie wskaźnika $q_2 = 0{,}01$, odpowiadające aproksymacji na poziomie 99%, daje bardzo dobre wypadkowe charakterystyki amplitudowe (rys. 5.7a). Analizując jednak rozkład biegunów (rys. 5.8a) uzyskanego quasi-odwrotnego filtru korekcyjnego widać, że bieguny powodujące graniczną niestabilność układu odwrotnego pozostają praktycznie na swoim miejscu, o czym wspomniano wcześniej.

Nieznaczne pogorszenie aproksymacji do poziomu 97% ($q_2 = 0{,}03$) powoduje wyraźne odsunięcie się biegunów od okręgu jednostkowego (rys. 5.8b) i znacznie krótszą odpowiedź impulsową (rys. 5.9b) w stosunku do odpowiedzi uzyskanej dla poprzednich założeń (rys. 5.9a). Oczywiście wpływa to na kształt wypadkowych charakterystyk amplitudowych (rys. 5.7b), szczególnie powodując pogorszenie korekcji w wąskich pasmach częstotliwości blisko punktów związanych z wpływem zer układu zniekształcającego leżących bezpośrednio na okręgu jednostkowym.

Dalsze zmniejszanie poziomu aproksymacji prowadzi do coraz większego odsuwania biegunów filtru korekcyjnego od okręgu jednostkowego przy jednoczesnym pogarszaniu się wypad-



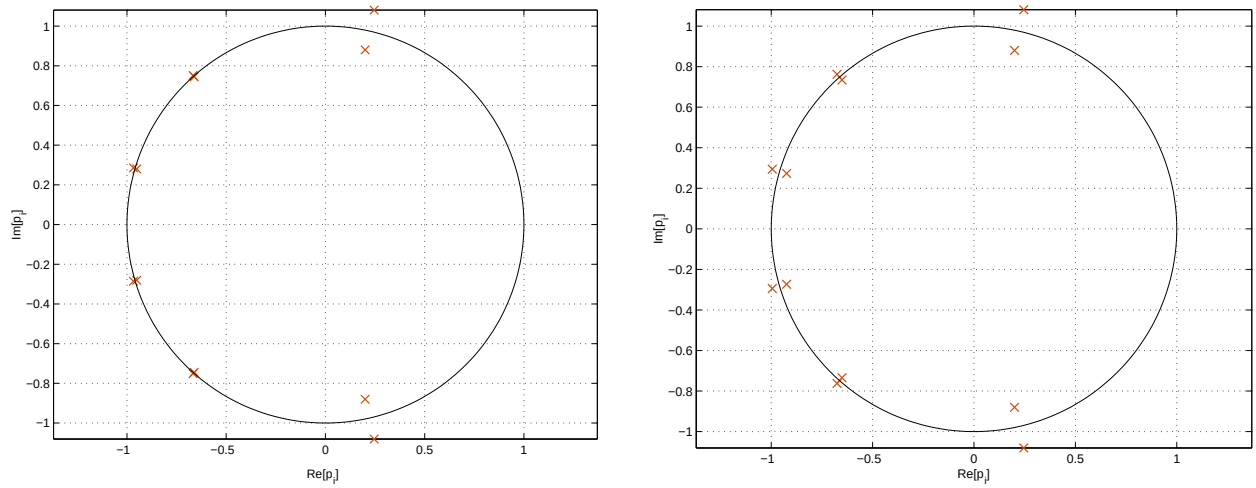
a) $q_2 = 0{,}01$



b) $q_2 = 0{,}03$

Rys. 5.7. Charakterystyki częstotliwościowe układów wypadkowych uzyskanych dla przyjętych wartości wskaźnika aproksymacji q_2

kowych charakterystyk amplitudowych. Dlatego przyjęcie odpowiedniej wartości wskaźnika aproksymacji q_2 zależy wyłącznie od projektanta filtra. Przedstawiona teoria filtrów quasi-odwrotnych umożliwia jedynie w takim przypadku uzyskanie rozwiązania optymalnego uzależnionego od dobranej wartości q_2.

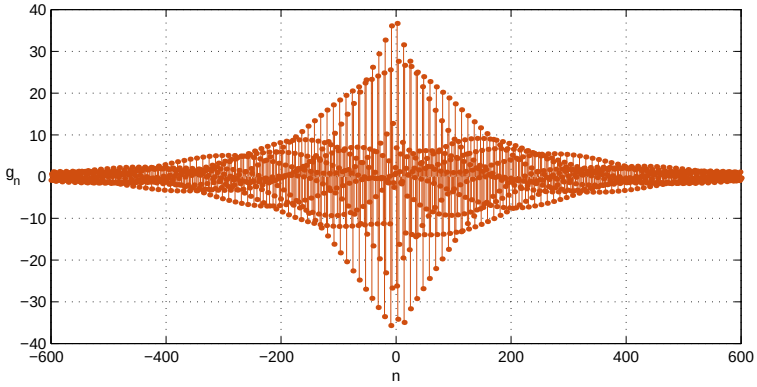


a) $q_2 = 0{,}01$ b) $q_2 = 0{,}03$

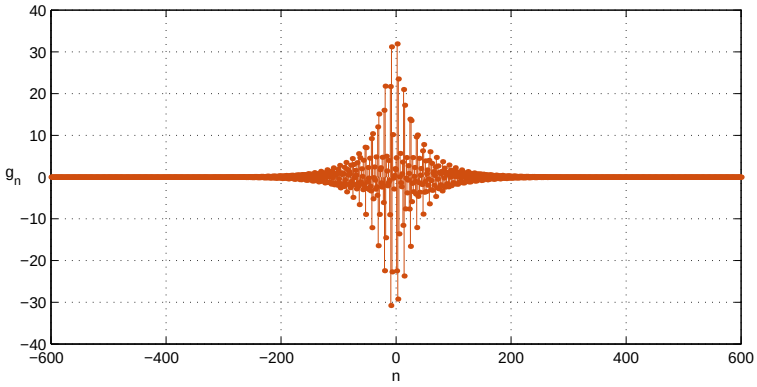
Rys. 5.8. Rozkłady biegunów filtrów quasi-odwrotnych uzyskanych dla przyjętych wartości wskaźnika aproksymacji q_2

Tablica 5.2. Współrzędne i moduły biegunów filtrów quasi-odwrotnych uzyskanych dla przyjętych wartości wskaźnika aproksymacji q_2

q_2	0,01			0,03		
i	$\mathrm{Re}[p_i]$	$\mathrm{Im}[p_i]$	$\lvert p_i\rvert$	$\mathrm{Re}[p_i]$	$\mathrm{Im}[p_i]$	$\lvert p_i\rvert$
1	−0,9512	0,2806	0,9917	−0,9243	0,2733	0,9639
2	−0,9512	−0,2806	0,9917	−0,9243	−0,2733	0,9639
3	−0,9672	0,2853	1,0084	−0,9949	0,2942	1,0375
4	−0,9672	−0,2853	1,0084	−0,9949	−0,2942	1,0375
5	−0,6612	0,7446	0,9958	−0,6512	0,7345	0,9816
6	−0,6612	−0,7446	0,9958	−0,6512	−0,7345	0,9816
7	−0,6668	0,7509	1,0042	−0,6759	0,7622	1,0187
8	−0,6668	−0,7509	1,0042	−0,6759	−0,7622	1,0187
9	0,2000	0,8800	0,9024	0,2000	0,8799	0,9024
10	0,2000	−0,8800	0,9024	0,2000	−0,8799	0,9024
11	0,2456	1,0806	1,1081	0,2456	1,0806	1,1082
12	0,2456	−1,0806	1,1081	0,2456	−1,0806	1,1082



a) $q_2 = 0{,}01$



b) $q_2 = 0{,}03$

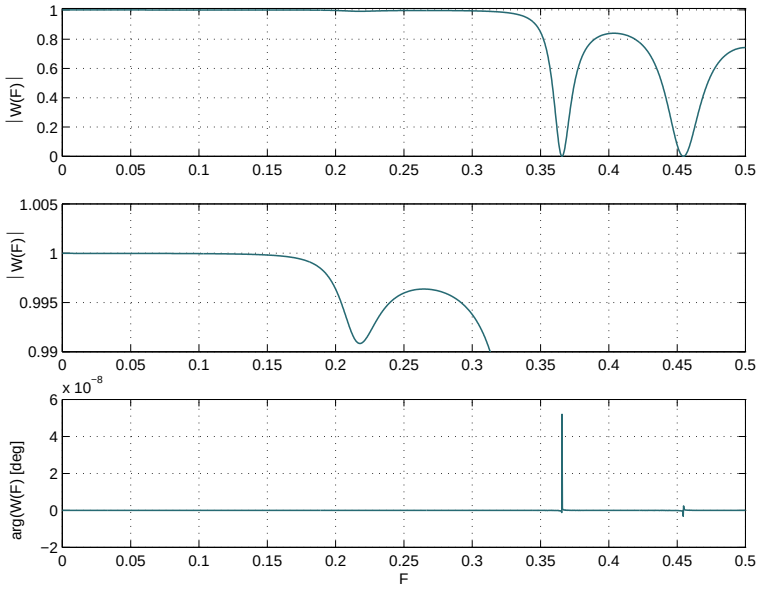
Rys. 5.9. Nieprzyczynowe odpowiedzi impulsowe filtrów quasi-odwrotnych uzyskanych dla przyjętych wartości wskaźnika aproksymacji q_2

Dla prezentowanych przypadków, w tabeli 5.2 zebrano współrzędne i moduły biegunów uzyskanych filtrów quasi-odwrotnych. Można w niej zauważyć, że bieguny występują zawsze czwórkami, co wnioskowano w punkcie 4.1. Przykłem takiej czwórki są bieguny p_1, p_2, p_3 i p_4, gdyż dla $q_2 = 0{,}1$ otrzymuje się:

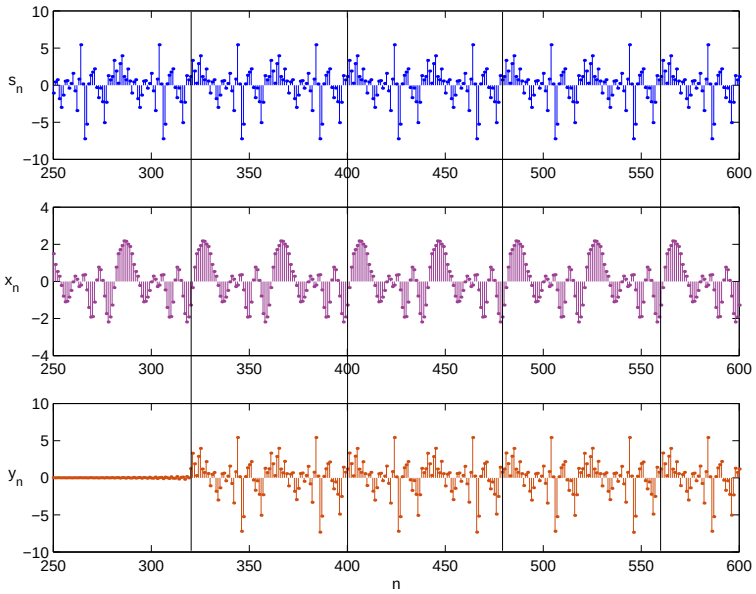
$$\begin{aligned} p_1^* &= -0{,}9512 - 0{,}2806i = p_2 \\ p_1^{-1} &= (-0{,}9512 + 0{,}2806i)^{-1} = -0{,}9672 - 0{,}2853i = p_4 \\ (p_1^*)^{-1} &= (-0{,}9512 - 0{,}2806i)^{-1} = -0{,}9672 + 0{,}2853i = p_3 \end{aligned}$$

Korekcja sygnałów o długim lub nieskończenie długim czasie trwania wymaga zastosowania filtracji sekcjonowanej ze względu na część antyprzyczynową filtru quasi-odwrotnego. Zakładając, że korekcji mają podlegać tylko harmoniczne sygnału z pasma 0..0,3 z dokładnością większą od 1%, dobrano odpowiednią wartość wskaźnika $q_2 = 0{,}08$, która daje aproksy-

mację na poziomie $PA_2 = 92\%$. Rys. 5.10 przedstawia uzyskane wypadkowe charakterystyki częstotliwościowe[5].



Rys. 5.10. Charakterystyki częstotliwościowe układu wypadkowego dla $q_2 = 0{,}08$

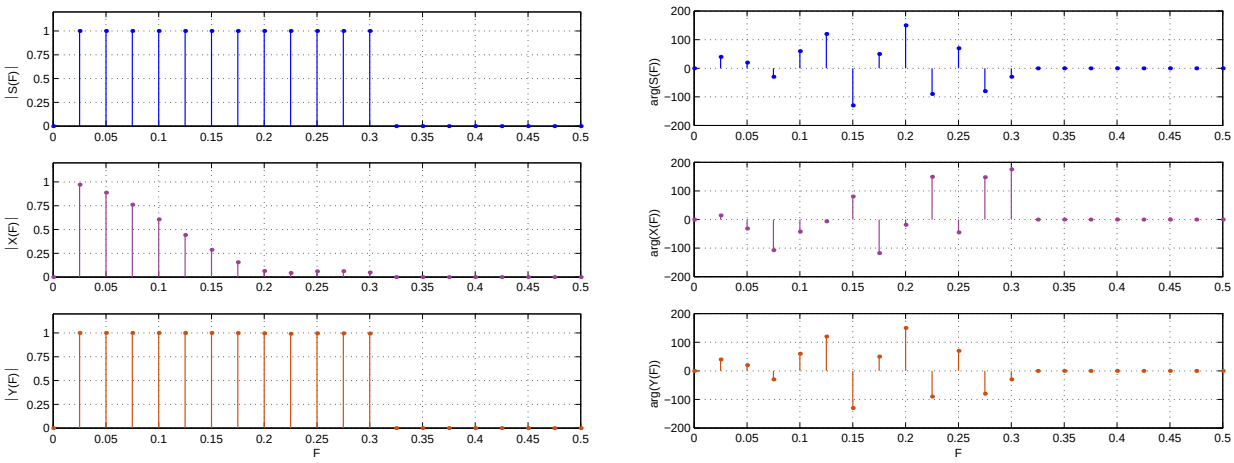


Rys. 5.11. Przebiegi czasowe sygnałów w torze korekcyjnym dla $q_2 = 0{,}08$

Dobierając długość sekcji zgodnie z algorytmem i zaleceniami przedstawionymi w [33], uzyskano wartość wynoszącą 92 próbki. Podczas symulacji stwierdzono, że zakładaną dokład-

[5]Środkowa charakterystyka przedstawia powiększenie charakterystyki częstotliwościowej amplitudowej.

ność można uzyskać również przy 80 próbkach, co jednocześnie pozwala na nie wprowadzanie dodatkowego przesunięcia fazowego pomiędzy sygnałami $\{s_n\}$ a $\{y_n\}$ (długość sekcji jest całkowitą krotnością ilości próbek w okresie sygnału). Na rys. 5.11 przedstawiono sygnał wejściowy $\{s_n\}$ na układ zniekształcający, sygnał $\{x_n\}$ po przejściu przez ten układ, oraz sygnał $\{y_n\}$ na wyjściu filtru korekcyjnego. Dodatkowo pionowymi liniami ciągłymi zaznaczono granice poszczególnych sekcji. Rys. 5.12a przedstawia widma amplitudowe, natomiast rys. 5.12b fazowe, wspomnianych sygnałów.



a) widma amplitudowe b) widma fazowe

Rys. 5.12. Widma amplitudowe i fazowe sygnałów z rys. 5.11

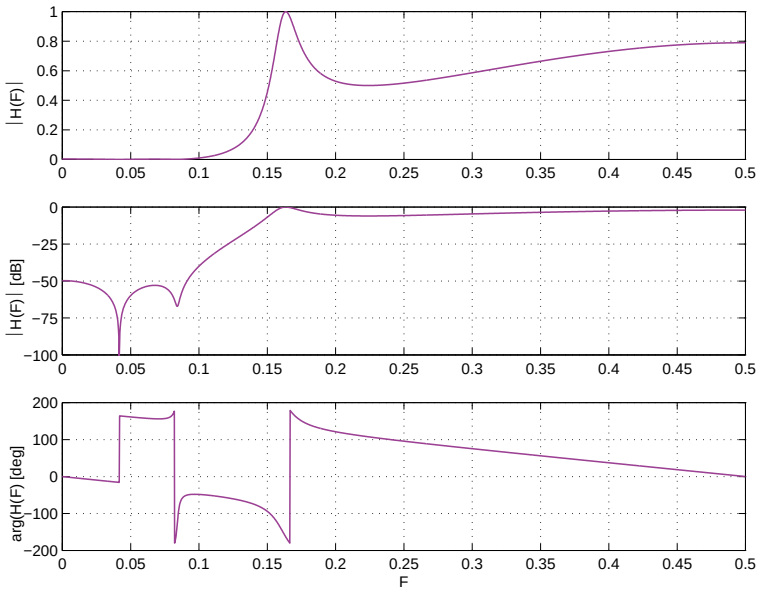
W tabeli 5.3 zebrano wartości błędów względnych δ_{amp} odtworzenia amplitud poszczególnych harmonicznych (błędy względne δ_{faz} dotyczące przesunięć fazowych uzyskano na poziomie pomijalnie małym). Jak widać spełniają one poczynione założenie odnośnie zakładanej dokładności.

Tablica 5.3. Błędy względne odtworzenia poszczególnych harmonicznych sygnału $\{s_n\}$ z rys. 5.11

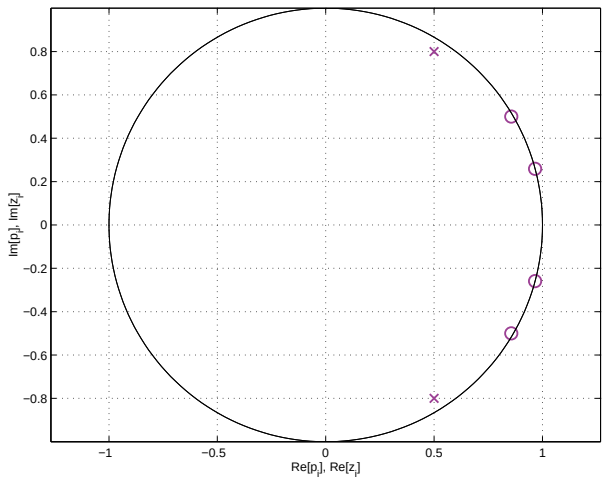
Harmoniczna	$\delta_{amp}[\%]$	*Harmoniczna*	$\delta_{amp}[\%]$
1	0,0016	7	0,0618
2	0,0019	8	0,3665
3	0,0026	9	0,8024
4	0,0041	10	0,4030
5	0,0077	11	0,3821
6	0,0182	12	0,6242

5.3. Przykład 2

Korekcja przy wykorzystaniu filtrów quasi-odwrotnych może dotyczyć każdego rodzaju układów, w tym również układów zniekształcających, które tłumią dolne częstotliwości w przetwarzanym paśmie. W niniejszym przykładzie założono, że układ korygowany jest określony przez transmitancję w postaci wymiernej.



Rys. 5.13. Charakterystyki częstotliwościowe układu zniekształcającego



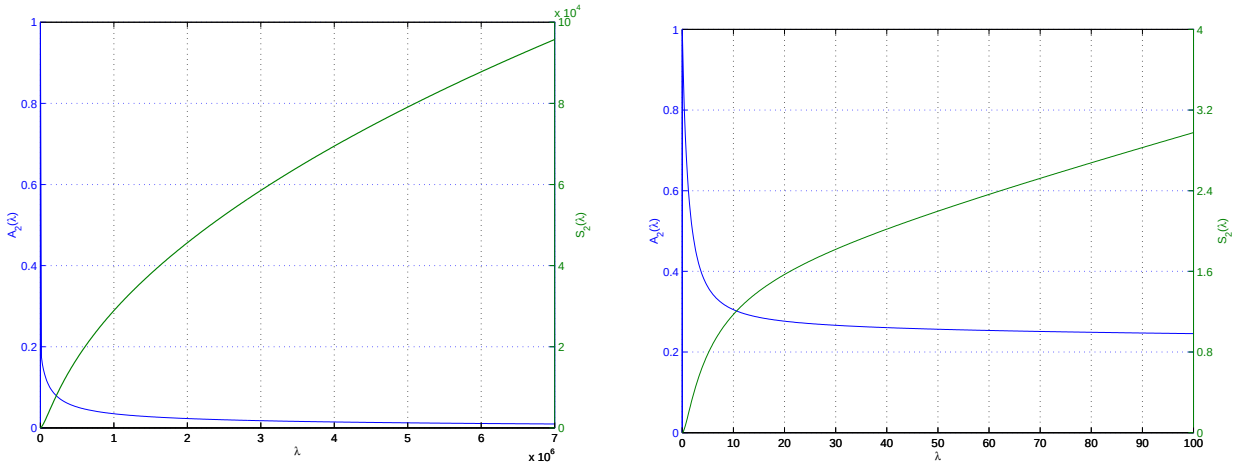
i	$\mathrm{Re}[z_i]$	$\mathrm{Im}[z_i]$	$\lvert z_i \rvert$
1	0,8560	0,5000	0,9914
2	0,8560	−0,5000	0,9914
3	0,9659	0,2588	1,0000
4	0,9659	−0,2588	1,0000

Rys. 5.14. Rozkład zer i biegunów układu zniekształcającego

Przedstawiony na rys. 5.14 rozkład zer[6] świadczy, iż przeprowadzenie korekcji poprzez zastosowanie idealnego układu odwrotnego spowoduje uzyskanie układu korekcyjnego niestabilnego w sensie BIBO. Zastosowanie teorii przedstawionej w niniejszej pracy daje możliwość uzyskania co prawda nieprzyczynowego, jednak zgodnie z punktem 2.3.2 stabilnego filtru korekcyjnego.

Ze względu na większą intuicyjność związaną z zakładaniem współczynnika aproksymacji układu wypadkowego w stosunku do układu tożsamościowego, również w tym przykładzie przy projektowaniu quasi-odwrotnego filtru korekcyjnego zastosowano rozwiązanie uzyskane dla drugiego zadania optymalizacyjnego. Dla porównania projekt filtru quasi-odwrotnego realizującego korekcję tego samego układu zniekształcającego, jednak na podstawie rozwiązań uzyskanych dla pierwszego zadania optymalizacyjnego, zostanie przedstawiony w kolejnym przykładzie.

Rys. 5.15 obrazuje przebiegi funkcji aproksymacji $A_2(\lambda)$ i stabilności $S_2(\lambda)$ właściwe dla rozpatrywanego przykładu. Wartości zmian mnożnika λ dobrano tak, aby uwidocznić zmiany wartości funkcji aproksymacji $A_2(\lambda)$ dla zakresu $q_2 = 0,01..1$. Odpowiada to procentowej aproksymacji układu tożsamościowego przez układ wypadkowy w odpowiednio zakresie 99%..0%.



a) $\lambda = 0..7 \cdot 10^6$ b) $\lambda = 0..100$

Rys. 5.15. Wykresy funkcji stabilności $S_2(\lambda)$ i aproksymacji $A_2(\lambda)$

W tablicy 5.4 zebrano przyjęte wartości wskaźnika aproksymacji q_2, odpowiadające im procentowe poziomy aproksymacji PA_2 układu tożsamościowego przez układ wypadkowy oraz uzyskane wartości mnożnika λ wyznaczone za pomocą algorytmu z rys. 5.2.

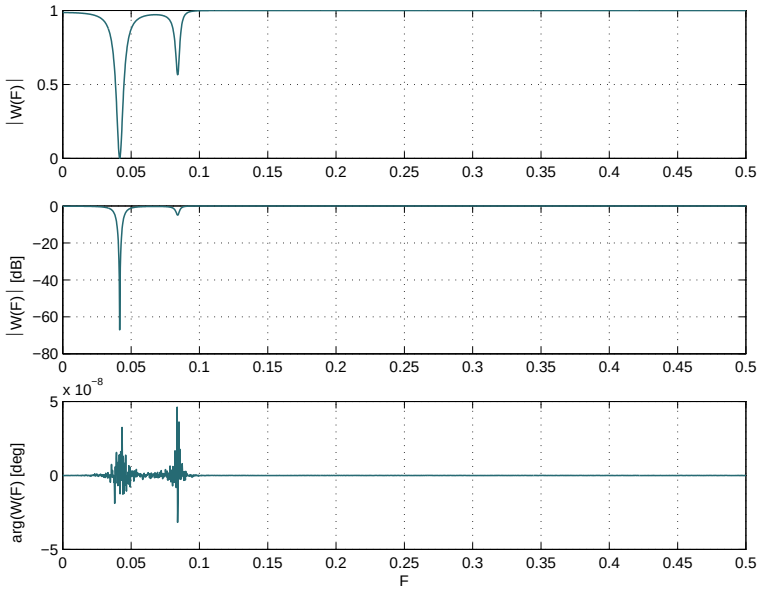
[6]Tablica przy rys. 5.14 nie zawiera współrzędnych i modułów biegunów układu zniekształcającego, gdyż ich położenie nie jest istotne z punktu widzenia rozpatrywanego problemu.

Tablica 5.4. Przyjęte wartości wskaźnika q_2 oraz odpowiadające im poziomy aproksymacji PA_2 i wartości mnożnika λ

q_2	PA_2	λ
0,01	99%	6703485
0,04	96%	787336
0,21	79%	1405

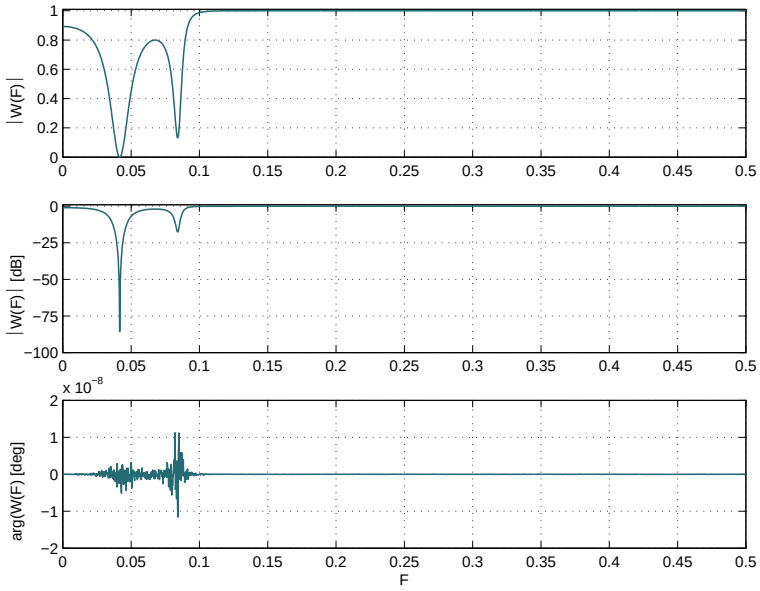
Przyjęcie wartości wskaźnika aproksymacji $q_2 = 0{,}01$ daje możliwość korekcji harmonicznych przetwarzanego sygnału prawie z całego pasma przetwarzanych częstotliwości. Wyjątkiem są częstotliwości, dla których tłumienie w układzie zniekształcającym było bardzo duże lub nieskończenie duże w wyniku występowania zer blisko okręgu jednostkowego lub bezpośrednio na nim. W przypadku występowania w przetwarzanym sygnale harmonicznych o takich częstotliwościach, ich odtworzenie jest praktyczne niemożliwe, gdyż informacja o nich została bezpowrotnie utracona.

Pomimo dobrych wypadkowych charakterystyk częstotliwościowych parametry dynamiczne uzyskanego filtru korekcyjnego mogą być jeszcze niezadowalające, gdyż jego bieguny leżą

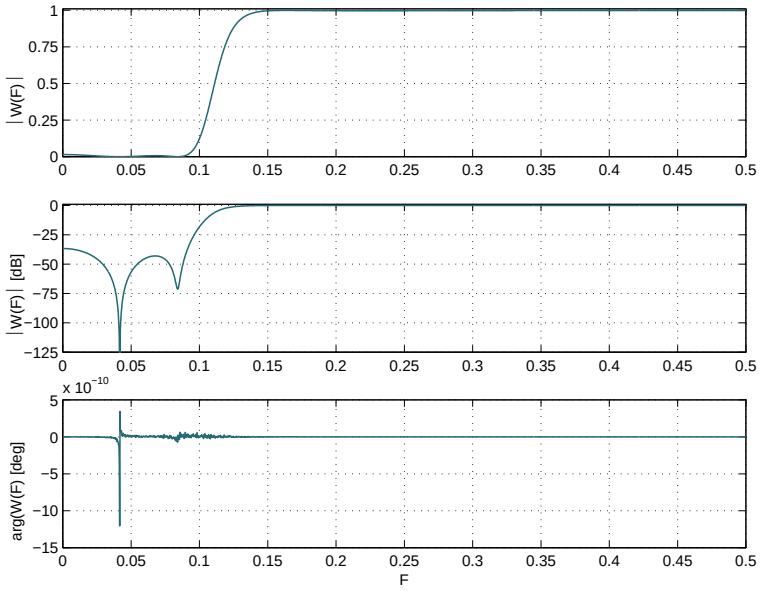


a) $q_2 = 0{,}01$

Rys. 5.16. Charakterystyki częstotliwościowe układów wypadkowych uzyskanych dla przyjętych wartości wskaźnika aproksymacji q_2



b) $q_2 = 0{,}04$



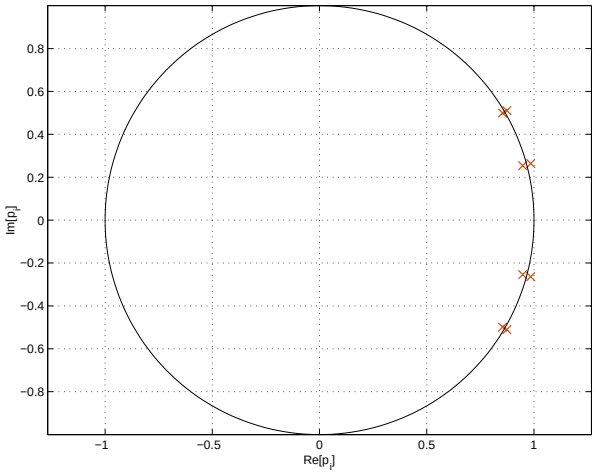
c) $q_2 = 0{,}21$

Rys. 5.16. Kontynuacja

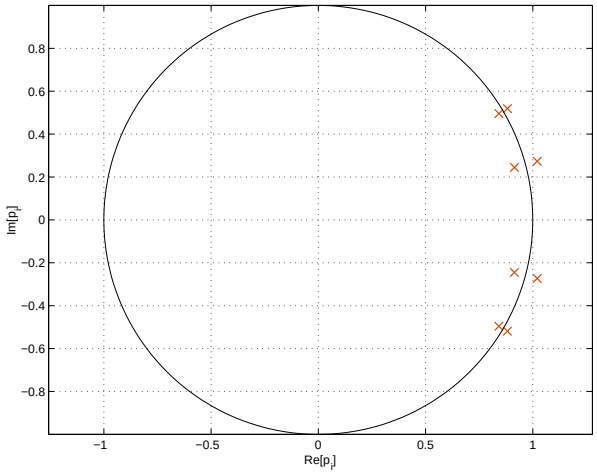
nadal bardzo blisko okręgu jednostkowego (rys. 5.17a), co objawia się również stosunkowo długą odpowiedzią impulsową (rys. 5.18a).

Zmniejszenie wskaźnika q_2 do wartości 0,04 umożliwia dalsze odsunięcie biegunów filtru quasi-odwrotnego od okręgu jednostkowego (rys. 5.17b). To 3% pogorszenie aproksymacji do 96% znacznie poprawia przebieg jego odpowiedzi impulsowej (rys. 5.18b), która znacznie szybciej

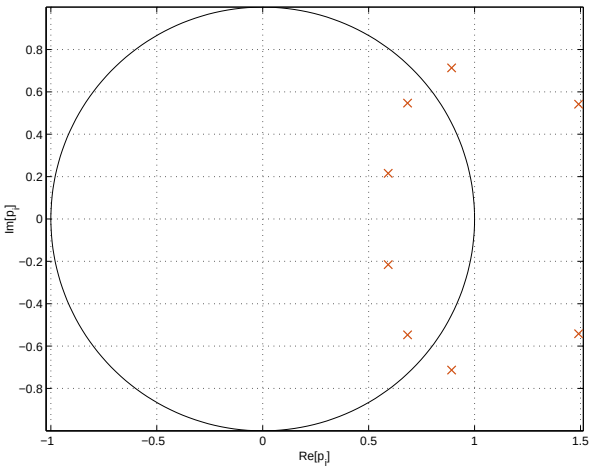
wygasa. Jednocześnie następuje pogorszenie przebiegów charakterystyk częstotliwościowych układu wypadkowego (rys. 5.16b), a korekcja w paśmie zaporowym układu zniekształcającego jest tylko częściowa. Jest to cena płacona za polepszenie właściwości dynamicznych zastosowanego do korekcji filtru quasi-odwrotnego.



a) $q_2 = 0{,}01$



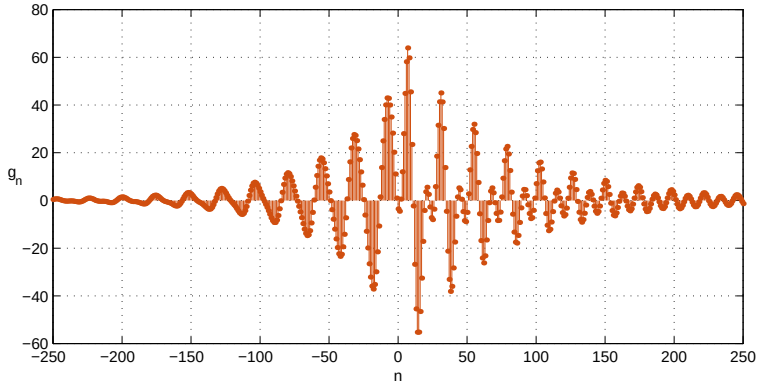
b) $q_2 = 0{,}04$



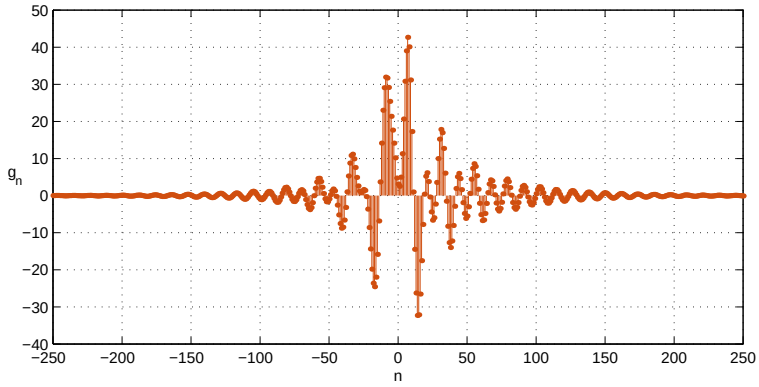
c) $q_2 = 0{,}21$

Rys. 5.17. Rozkład biegunów filtrów quasi-odwrotnych uzyskanych dla przyjętych wartości wskaźnika aproksymacji q_2

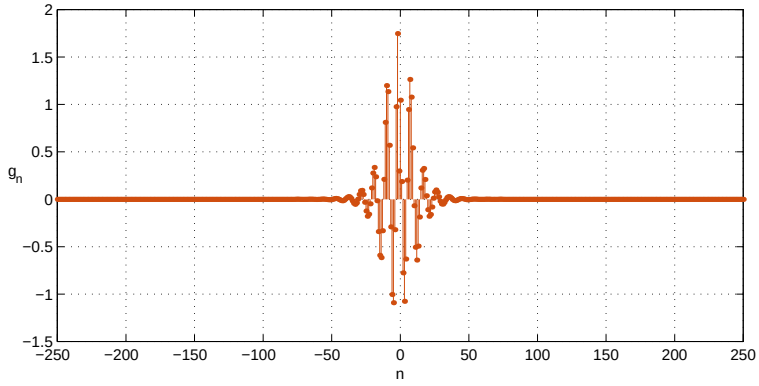
Możliwy jest również taki dobór wartości wskaźnika q_2, aby korekcji podlegało tylko pasmo przepustowe układu zniekształcającego. Dla prezentowanego przykładu korekcję taką uzyskuje się przy $q_2 = 0{,}21$. Rozkład biegunów filtru korekcyjnego (rys. 5.17c) dla przyjętej wartości q_2 wskazuje na jego dużą stabilność, a jego odpowiedź impulsowa jest znacznie krótsza od uzyskanej dla poprzedniej wartości wskaźnika q_2.



a) $q_2 = 0{,}01$



b) $q_2 = 0{,}04$

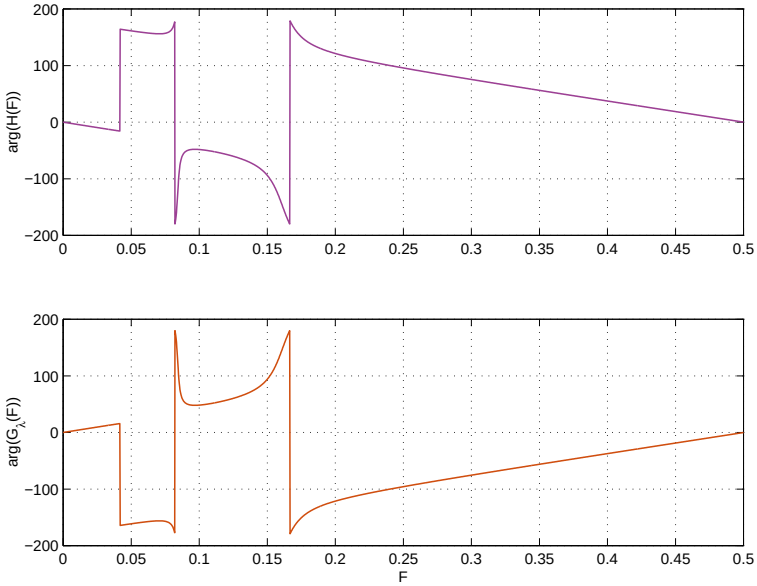


c) $q_2 = 0{,}21$

Rys. 5.18. Nieprzyczynowe odpowiedzi impulsowe filtrów quasi-odwrotnych uzyskanych dla przyjętych wartości wskaźnika aproksymacji q_2

Dalsze zwiększanie wartości wskaźnika q_2 powyżej 0,21 powoduje na tyle duże pogorszenie aproksymacji, że nie jest możliwe przeprowadzenie korekcji nawet w paśmie przepustowym układu zniekształcającego.

Niezależnie od przyjętej wartości wskaźnika q_2, filtr quasi-odwrotny posiada zawsze dokładnie odwrotną charakterystykę fazową w stosunku do charakterystyki fazowej układu zniekształcającego, co wykazano w punkcie 4.2, a obecnie potwierdzono symulacyjnie i zaprezentowano na rys. 5.19. Dzięki temu uzyskuje się zawsze pełną korekcję zniekształceń fazowych. Oczywiście ta pełna korekcja uzyskiwana jest tylko wtedy, gdy dysponujemy bardzo dokładnym modelem matematycznym układu zniekształcającego.



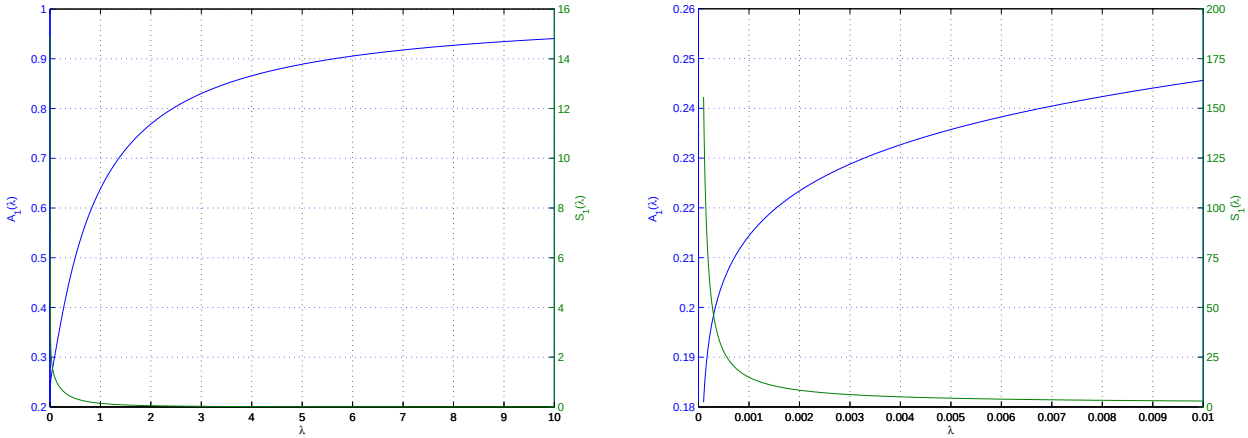
Rys. 5.19. Porównanie charakterystyk częstotliwościowych fazowych $\arg(H(F))$ układu korygowanego oraz $\arg(G_\lambda(F))$ filtru quasi-odwrotnego uzyskanego dla $q_2 = 0{,}21$

Analizując zaprezentowane przypadki widać, że dobór odpowiedniej wartości wskaźnika q_2 jest kompromisem pomiędzy dopuszczalnym w danym przypadku spadkiem poziomu aproksymacji układu tożsamościowego, a pożądaną stabilnością quasi-odwrotnego filtru korekcyjnego.

5.4. Przykład 3

Synteza quasi-odwrotnego filtru korekcyjnego zarówno przy wykorzystaniu wyników uzyskanych dla pierwszego jak i drugiego zadania optymalizacyjnego, przy spełnieniu pewnych warunków, prowadzi w końcowym etapie do uzyskania tego samego filtru. Przyjmując, że układ zniekształcający określony jest identycznie jak w poprzednim przykładzie, projekt filtru korekcyjnego przeprowadzono na podstawie rozwiązań uzyskanych dla pierwszego zadania optymalizacyjnego, gdzie założeniu podlega wskaźnik stabilności, natomiast optymalizowany jest wskaźnik aproksymacji.

Wykresy funkcji aproksymacji $A_1(\lambda)$ i stabilności $S_1(\lambda)$ dla rozpatrywanego przypadku przedstawiono na rys. 5.20. Można zauważyć, że kształty otrzymanych przebiegów funkcji są zgodne z wykresami uzyskanymi na drodze teoretycznej w punkcie 4.3.1, co potwierdza poprawność przeprowadzonych analiz. Zgodnie ze wzorem (3.69) wartość q_1 zakładanego wskaźnika jest równoważna wartości funkcji stabilności $S_1(\lambda)$.

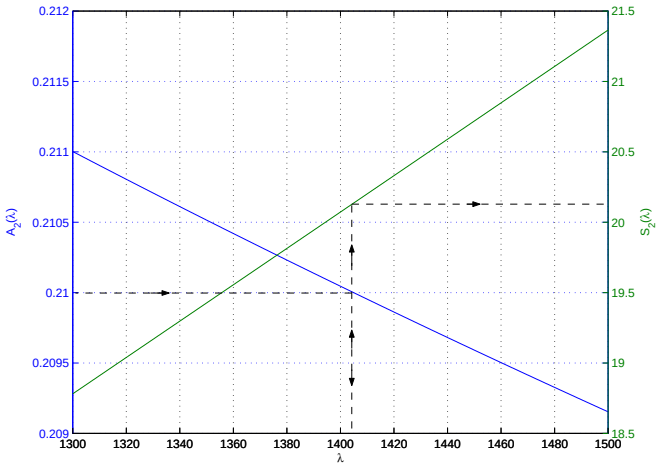


a) $\lambda = 0,001..10$ b) $\lambda = 0,0001..0,01$

Rys. 5.20. Wykresy funkcji stabilności $S_1(\lambda)$ i aproksymacji $A_1(\lambda)$

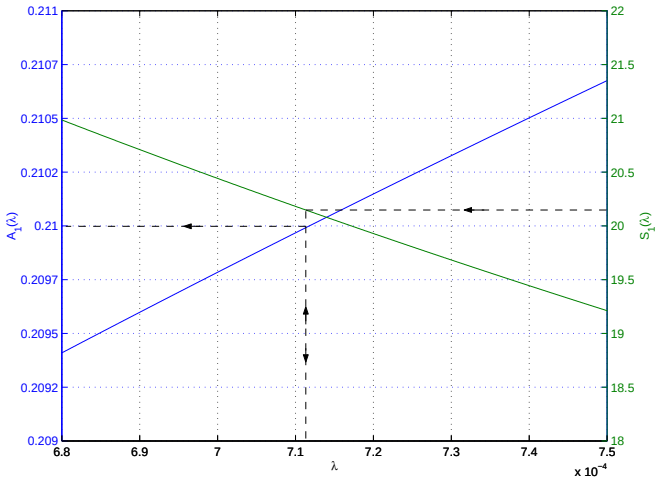
Na rys. 5.21 przedstawiono graficznie wyznaczanie wartości mnożnika λ dla poprzedniego przykładu przy $q_2 = 0,21$, obrazując jednocześnie uzyskaną na podstawie wzoru (4.66) wartość funkcji stabilności $S_2(\lambda)$. Dokładne wartości wszystkich parametrów przedstawiono w tabeli obok rysunku.

Przeprowadźmy teraz projekt filtru quasi-odwrotnego do korekcji układu zniekształcającego z przykładu 2, bazując na wzorach uzyskanych dla pierwszego zadania optymalizacyjnego i przyjmując wartość wskaźnika q_1 równą wartości funkcji $S_2(\lambda)$ uzyskaną w poprzednim przykładzie dla $q_2 = 0{,}21$. Zgodnie z procedurą projektową, posługując się algorytmem z rys. 5.2 wyznaczono wartość mnożnika $\lambda = 7{,}11773 \cdot 10^{-4}$. Obliczając wartość funkcji aproksymacji $A_1(\lambda)$ dla uzyskanego λ na podstawie wzoru (4.53), co graficznie przedstawiono na rys. 5.22, otrzymuje się taki sam wynik, jak wartość przyjętego wskaźnika aproksymacji w poprzednim przykładzie. Oznacza to, iż uzyskany filtr będzie posiadał taki sam poziom aproksymacji. Zatem, jak nadmieniono w punkcie 4.1.2, można uznać, iż przedstawione dwa podejścia prowadzą do uzyskania identycznych rezultatów.



q_2	0,21000
λ	1405,94185
$S_2(\lambda)$	20,13625

Rys. 5.21. Graficzna prezentacja określenia charakterystycznych wartości przy projektowaniu filtru quasi-odwrotnego zgodnie z drugim zadaniem optymalizacyjnym



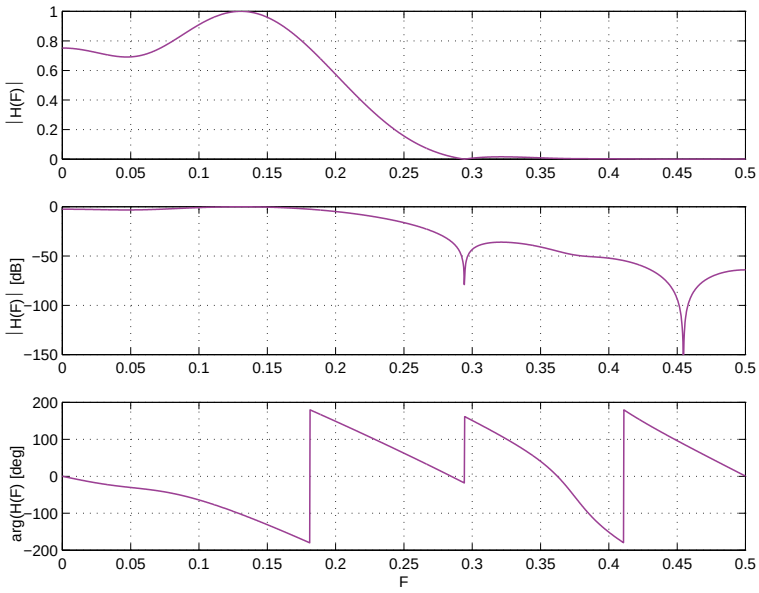
q_1	20,13625
λ	$7{,}11773 \cdot 10^{-4}$
$A_1(\lambda)$	0,21000

Rys. 5.22. Graficzna prezentacja określenia charakterystycznych wartości przy projektowaniu filtru quasi-odwrotnego zgodnie z pierwszym zadaniem optymalizacyjnym

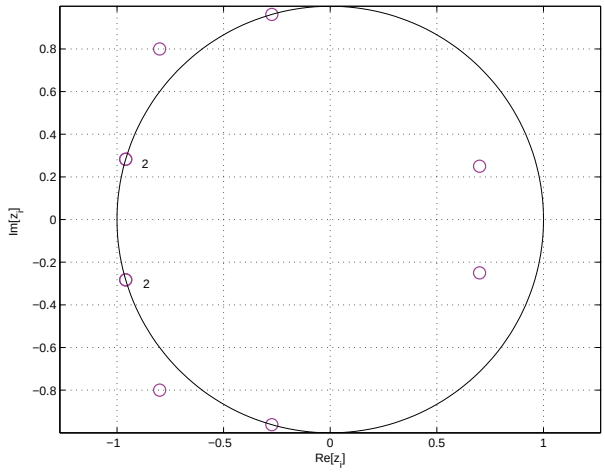
5.5. Przykład 4

Nie w każdym przypadku udaje się uzyskać filtr korekcyjny o dobrych parametrach dynamicznych (krótka odpowiedź impulsowa) przy stosunkowo wysokiej wartości poziomu aproksymacji PA_2. Niniejszy przykład pokazuje właśnie taki przypadek.

Jako układ zniekształcający przyjęto układ opisany transmitancją $H(z)$ w postaci wielomianu 10-tego rzędu o charakterystykach częstotliwościowych przedstawionych na rys. 5.23. Zgodnie z rozkładem zer, przedstawionym na rys. 5.24, posiada on 4 zera (w tym 2 podwójne) umieszczone na okręgu jednostkowym. Dodatkowo jedna para zer leży poza kołem jednostkowym. Zatem idealna odwrotność, nawet potraktowana jako układ nieprzyczynowy, nie będzie



Rys. 5.23. Charakterystyki częstotliwościowe układu zniekształcającego



i	$\mathrm{Re}[z_i]$	$\mathrm{Im}[z_i]$	$\lvert z_i \rvert$
1	−0,9591	0,2829	1,0000
2	−0,8000	0,8000	1,1314
3	−0,2739	0,9618	1,0000
4	0,7000	0,2500	0,7433

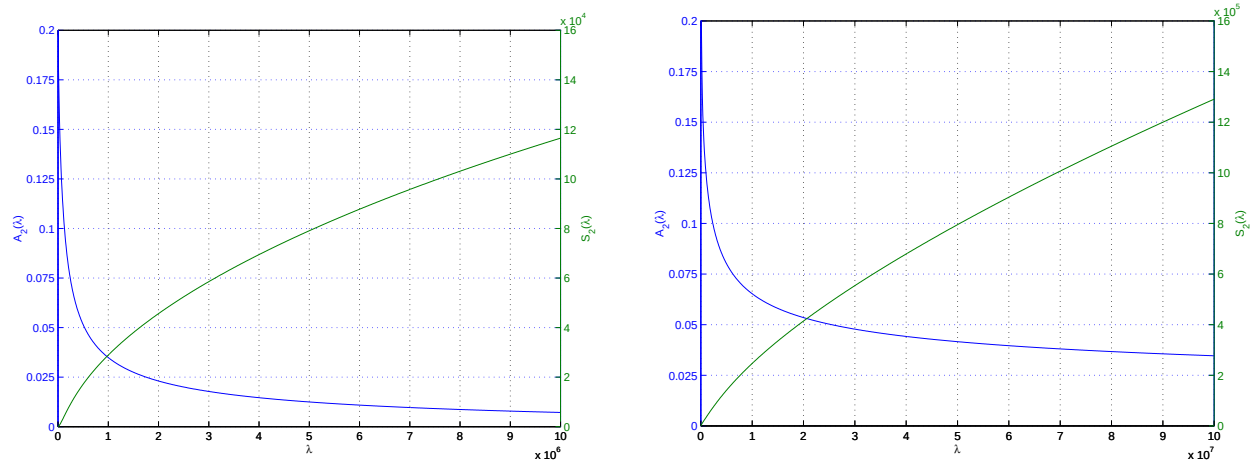
Rys. 5.24. Rozkład zer układu zniekształcającego

układem stabilnym. Do zaprojektowania filtru korekcyjnego zastosowano więc proponowaną w pracy metodę zgodną z wynikami uzyskanymi dla drugiego zadania optymalizacyjnego. Na rys. 5.25 przedstawiono uzyskane wykresy funkcji stabilności $S_2(\lambda)$ oraz aproksymacji $A_2(\lambda)$.

Porównując wykresy funkcji aproksymacji $A_2(\lambda)$ i stabilności $S_2(\lambda)$ dla prezentowanego przykładu i przykładu 2 przy zakresie zmian wskaźnika $q_2 = 0..0{,}2$ można zauważyć, że wartość funkcji stabilności, która reprezentuje energię odpowiedzi impulsowej filtru quasi-odwrotnego, jest o rząd większa w bieżącym przykładzie. Dodatkowo w przykładzie 2 funkcja aproksymacji szybciej zbliża się do wartości zerowej. Oznacza to, że przy tym samym poziomie aproksymacji filtr korekcyjny z prezentowanego przykładu będzie miał znacznie gorsze

właściwości dynamiczne, niż filtr z przykładu 2.

Nawet przy założeniu dość niskiego poziomu aproksymacji $PA_2 = 80\%$, wciąż istnieje czwórka biegunów, które leżą bardzo blisko okręgu jednostkowego pogarszając właściwości dynamiczne filtru quasi-odwrotnego.



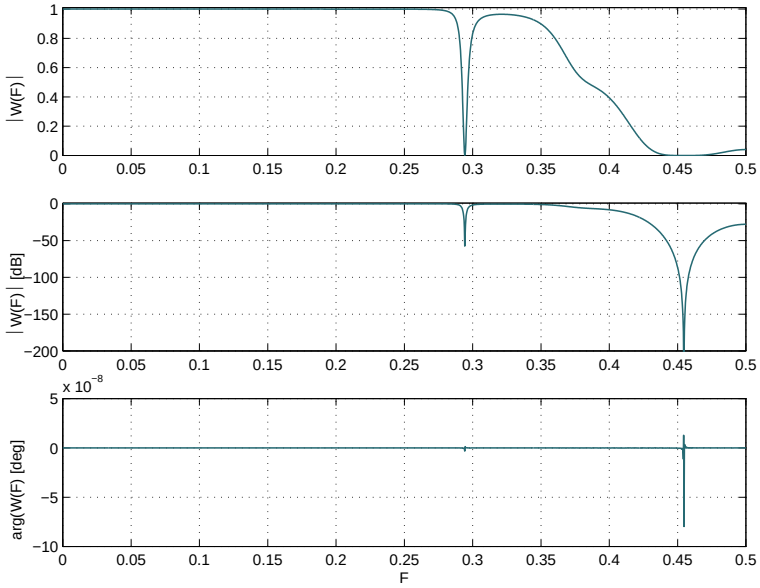
a) przykład 2, $\lambda = 0..10^7$ b) przykład 4, $\lambda = 0..10^8$

Rys. 5.25. Porównanie wykresów funkcji stabilności $S_2(\lambda)$ i aproksymacji $A_2(\lambda)$ dla przykładów 2 i 4, przy zakresie zmian wskaźnika aproksymacji $q_2 = 0..0{,}2$

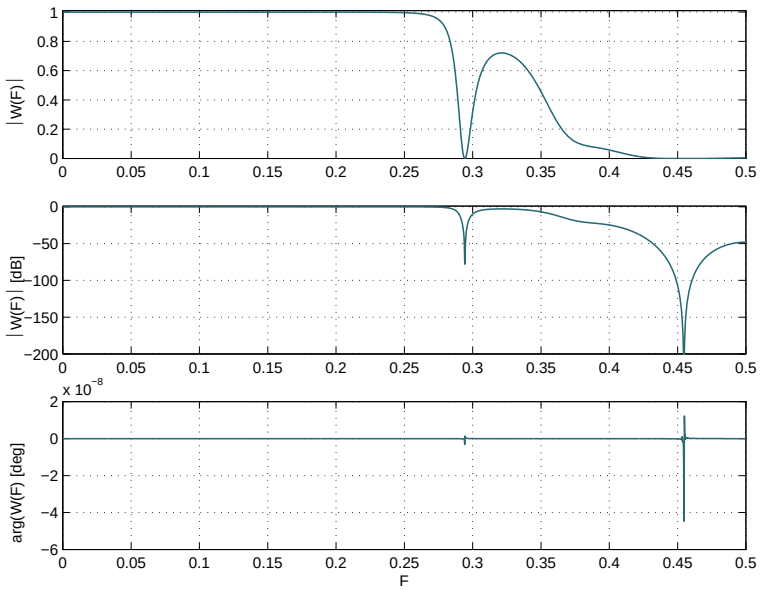
Tablica 5.5. Przyjęte wartości wskaźnika q_2 oraz odpowiadające im poziomy aproksymacji PA_2 i wartości mnożnika λ

q_2	PA_2	λ
0,2	80%	106215
0,3	70%	10077

Znaczne oddalenie czwórki wspomnianych biegunów, a przez to znaczące zmniejszenie wartości próbek odpowiedzi impulsowej, uzyskuje się dopiero przy wartości poziomu aproksymacji w granicach $PA_2 = 70\%$. W rozpatrywanym przykładzie trudno jest więc znaleźć rozwiązanie, które pozwalałoby na korekcję pasma zaporowego układu zniekształcającego, dając jednocześnie quasi-odwrotny filtr korekcyjny o dobrych właściwościach dynamicznych.

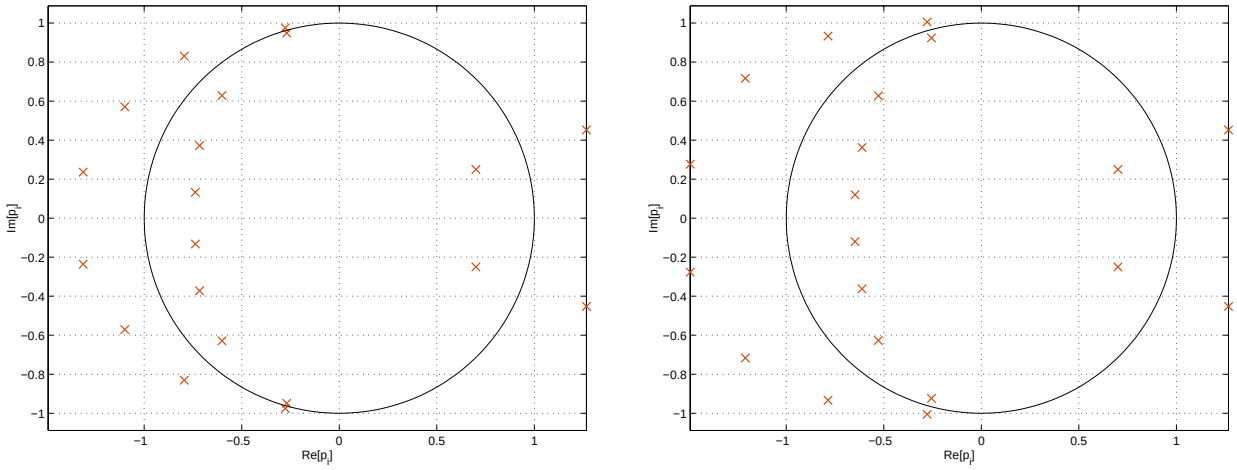


a) $q_2 = 0{,}2$



b) $q_2 = 0{,}3$

Rys. 5.26. Charakterystyki częstotliwościowe układów wypadkowych uzyskanych dla przyjętych wartości wskaźnika aproksymacji q_2

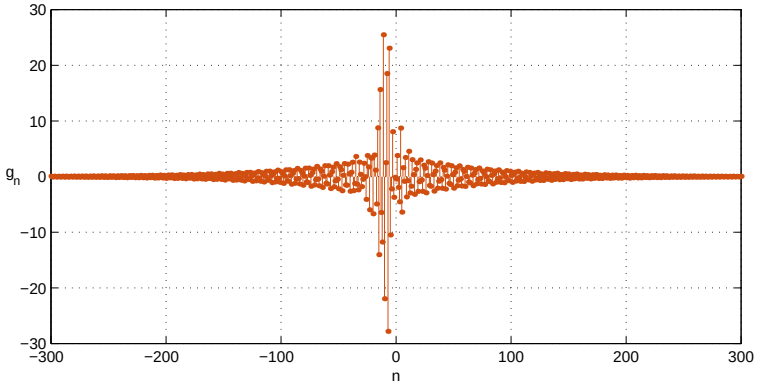


a) $q_2 = 0{,}2$ b) $q_2 = 0{,}3$

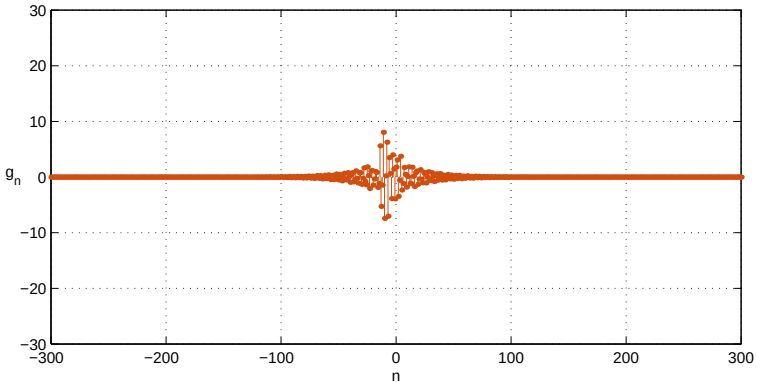
Rys. 5.27. Rozkłady biegunów filtrów quasi-odwrotnych uzyskanych dla przyjętych wartości wskaźnika aproksymacji q_2

Tablica 5.6. Współrzędne i moduły biegunów filtrów quasi-odwrotnych uzyskanych dla przyjętych wartości wskaźnika aproksymacji q_2

q_2	0,2			0,3		
i	$\mathrm{Re}[p_i]$	$\mathrm{Im}[p_i]$	$\lvert p_i\rvert$	$\mathrm{Re}[p_i]$	$\mathrm{Im}[p_i]$	$\lvert p_i\rvert$
1	−0,7379	0,1325	0,7497	−0,6478	0,1202	0,6589
2	−0,7163	0,3719	0,8071	−0,6118	0,3623	0,7110
3	−0,6016	0,6284	0,8699	−0,5279	0,6270	0,8196
4	−0,2694	0,9753	0,9864	−0,2555	0,9239	0,9586
5	0,7000	0,2500	0,7433	0,7000	0,2500	0,7433
6	−1,3129	0,2358	1,3339	−1,4923	0,2769	1,5178
7	−1,0996	0,5710	1,2390	−1,2101	0,7166	1,4064
8	−0,7949	0,8304	1,1495	−0,7859	0,9333	1,2201
9	−0,2769	0,9753	1,0138	−0,2780	1,0055	1,0432
10	1,2670	0,4525	1,3453	1,2670	0,4525	1,3454



a) $q_2 = 0{,}2$



b) $q_2 = 0{,}3$

Rys. 5.28. Nieprzyczynowe odpowiedzi impulsowe filtrów quasi-odwrotnych uzyskanych dla przyjętych wartości wskaźnika aproksymacji q_2

6. Podsumowanie

6.1. Podsumowanie wyników prac

W pracy przedstawiono metodę syntezy korekcyjnych filtrów quasi-odwrotnych, stabilnych w sensie BIBO w klasie układów nieprzyczynowych. Zakłada się przy tym istnienie modelu matematycznego układu zniekształcającego w postaci jego dyskretnej transmitancji lub dyskretnej odpowiedzi impulsowej. Stosowanie tego typu filtrów jest szczególnie przydatne w przypadku, gdy dyskretna transmitancja układu zniekształcającego posiada zera leżące na okręgu jednostkowym, co wymusza niestabilność jego idealnej odwrotności. Zastosowane przy syntezie filtrów podejście optymalizacyjne zakłada przyjęcie dwóch kryteriów:

- aproksymacji układu wypadkowego, powstałego przez kaskadowe połączenie układu zniekształcającego i filtru korekcyjnego, w stosunku do układu tożsamościowego,
- stabilności filtru korekcyjnego,

przy czym jedno z nich przyjmuje zawsze pewną założoną wartość. Okazuje się, że każde z dwóch przedstawionych podejść daje praktycznie identyczną postać filtru quasi-odwrotnego, co przedstawiono zarówno teoretycznie, jak również w jednym z przykładów symulacyjnych.

Dobór mnożnika λ, przez założenie odpowiedniej wartości wskaźnika aproksymacji lub stabilności, pozwala w tego typu filtrach korekcyjnych na sterowanie położeniem biegunów względem okręgu jednostkowego. Dlatego filtry quasi-odwrotne mogą być stosowane nie tylko w przypadku, gdy idealny filtr korekcyjny posiada bieguny leżące bezpośrednio na okręgu jednostkowym lecz również wtedy, gdy jego bieguny znajdują się w jego bardzo bliskiej odległości. Zastosowanie w takim wypadku filtru quasi-odwrotnego umożliwia więc poprawę stabilności układu korekcyjnego.

Do numerycznego wyznaczania wartości mnożnika λ w zależności od założonej wartości wskaźnika q zaproponowano algorytm wykorzystujący iteracyjną metodę Newtona, jednocześnie pokazując jej zbieżność.

Na podstawie uzyskanych rozwiązań algebraicznych przedstawiono transmitancję tego typu filtrów, pokazując również charakterystyczny rozkład ich biegunów. Rozkład ten zachowuje symetrię na płaszczyźnie zmiennej zespolonej z nie tylko względem osi liczb rzeczywistych lecz również względem okręgu jednostkowego.

Niewątpliwą zaletą filtrów quasi-odwrotnych jest posiadanie dokładnie odwrotnej charakterystyki fazowej do charakterystyki fazowej układu zniekształcającego niezależnie od przyjętej wartości wskaźnika aproksymacji lub stabilności. Należy jednak mieć na uwadze, że w praktyce zależne jest to jednak od dokładności przyjętego modelu układu zniekształcającego. Zatem dokładnie zerową charakterystykę fazową układu wypadkowego można uzyskać tylko przy wcześniejszej precyzyjnej identyfikacji układu zniekształcającego.

Pomimo, iż uzyskana rodzinę filtrów zaklasyfikowano do grupy układów nieprzyczynowych (co wynikło z konieczności uzyskania układu stabilnego), w wyniku zastosowania odpowiedniego schematu przetwarzania sygnału przez część antyprzyczynową pokazano, iż istnieje możliwość filtracji sygnałów o bardzo długim czasie trwania bez konieczności zapamiętywania próbek całego sygnału.

Przedstawione przykłady symulacyjne, w których zastosowano do korekcji hipotetycznych układów zniekształcających uzyskane filtry quasi-odwrotne, potwierdzają postawioną tezę o możliwości korekcji zniekształceń wprowadzanych przez układy o dyskretnej transmitancji z zerami na okręgu jednostkowym na drodze zastosowania filtrów cyfrowych.

6.2. Przewidywane dalsze prace

Niezwykle pomocnym w procesie projektowania filtru quasi-odwrotnego byłaby zależność pozwalająca na określenie wpływu przyjętej wartością mnożnika λ na położenie poszczególnych biegunów filtru quasi-odwrotnego względem okręgu jednostkowego. Pozwoliłoby to na bardziej precyzyjne sterowanie ich położeniem w zależności od przyjmowanej wartości wskaźnika q.

Rozwinięcie zaprezentowanej metody o analizę wpływu rozdzielczości przetwornika analogowo-cyfrowego oraz rozpatrzenie wpływu dokładności modelu matematycznego na dokładność przeprowadzanej korekcji pozwoli na wierniejsze oddanie procesów zachodzących w układzie rzeczywistym, natomiast podczas projektowania i implementacji umożliwi uwzględnienie większej liczby parametrów wpływowych.

A. Wybrane szczegółowe przekształcenia

A.1. Przekształcenia dotyczące wzoru (3.62)

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}_1(\boldsymbol{g}_\lambda+\boldsymbol{\Delta}_g,\lambda)-\mathcal{L}_1(\boldsymbol{g}_\lambda,\lambda)= \\
&\quad=\langle \boldsymbol{H}\boldsymbol{g}_\lambda+\boldsymbol{H}\boldsymbol{\Delta}_g-\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{H}\boldsymbol{g}_\lambda+\boldsymbol{H}\boldsymbol{\Delta}_g-\boldsymbol{\delta}\rangle+\lambda\langle \boldsymbol{g}_\lambda+\boldsymbol{\Delta}_g,\boldsymbol{g}_\lambda+\boldsymbol{\Delta}_g\rangle- \\
&\qquad+\lambda q_1-\langle \boldsymbol{H}\boldsymbol{g}_\lambda-\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{H}\boldsymbol{g}_\lambda-\boldsymbol{\delta}\rangle-\lambda\langle \boldsymbol{g}_\lambda,\boldsymbol{g}_\lambda\rangle+\lambda q_1= \\
&\quad=\langle \boldsymbol{H}\boldsymbol{g}_\lambda,\boldsymbol{H}\boldsymbol{g}_\lambda+\boldsymbol{H}\boldsymbol{\Delta}_g-\boldsymbol{\delta}\rangle+\langle \boldsymbol{H}\boldsymbol{\Delta}_g-\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{H}\boldsymbol{g}_\lambda+\boldsymbol{H}\boldsymbol{\Delta}_g-\boldsymbol{\delta}\rangle+\lambda\langle \boldsymbol{g}_\lambda,\boldsymbol{g}_\lambda+\boldsymbol{\Delta}_g)+ \\
&\qquad+\lambda\langle \boldsymbol{\Delta}_g,\boldsymbol{g}_\lambda+\boldsymbol{\Delta}_g\rangle-\langle \boldsymbol{H}\boldsymbol{g}_\lambda,\boldsymbol{H}\boldsymbol{g}_\lambda-\boldsymbol{\delta}\rangle+\langle \boldsymbol{\delta},\boldsymbol{H}\boldsymbol{g}_\lambda-\boldsymbol{\delta}\rangle-\lambda\langle \boldsymbol{g}_\lambda,\boldsymbol{g}_\lambda)= \\
&\quad=\langle \boldsymbol{H}\boldsymbol{g}_\lambda,\boldsymbol{H}\boldsymbol{g}_\lambda\rangle+\langle \boldsymbol{H}\boldsymbol{g}_\lambda,\boldsymbol{H}\boldsymbol{\Delta}_g-\boldsymbol{\delta}\rangle+\langle \boldsymbol{H}\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{g}},\boldsymbol{H}\boldsymbol{g}_\lambda+\boldsymbol{H}\boldsymbol{\Delta}_g-\boldsymbol{\delta}\rangle- \\
&\qquad+\langle \boldsymbol{\delta},\boldsymbol{H}\boldsymbol{g}_\lambda+\boldsymbol{H}\boldsymbol{\Delta}_g-\boldsymbol{\delta}\rangle+\lambda\langle \boldsymbol{g}_\lambda,\boldsymbol{g}_\lambda\rangle+\lambda\langle \boldsymbol{g}_\lambda,\boldsymbol{\Delta}_g\rangle+\lambda\langle \boldsymbol{\Delta}_g,\boldsymbol{g}_\lambda\rangle+\lambda\langle \boldsymbol{\Delta}_g,\boldsymbol{\Delta}_g\rangle- \\
&\qquad+\langle \boldsymbol{H}\boldsymbol{g}_\lambda,\boldsymbol{H}\boldsymbol{g}_\lambda\rangle+\lambda\langle \boldsymbol{\Delta}_g,\boldsymbol{\Delta}_g\rangle-\langle \boldsymbol{H}\boldsymbol{g}_\lambda,\boldsymbol{H}\boldsymbol{g}_\lambda\rangle+\langle \boldsymbol{H}\boldsymbol{g}_\lambda,\boldsymbol{\delta}\rangle+\langle \boldsymbol{\delta},\boldsymbol{H}\boldsymbol{g}_\lambda\rangle-\langle \boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\delta}\rangle- \\
&\qquad+\lambda\langle \boldsymbol{g}_\lambda,\boldsymbol{g}_\lambda\rangle= \\
&\quad=\langle \boldsymbol{H}\boldsymbol{g}_\lambda,\boldsymbol{H}\boldsymbol{\Delta}_g\rangle-\langle \boldsymbol{H}\boldsymbol{g}_\lambda,\boldsymbol{\delta}\rangle+\langle \boldsymbol{H}\boldsymbol{\Delta}_g,\boldsymbol{H}\boldsymbol{g}_\lambda\rangle+\langle \boldsymbol{H}\boldsymbol{\Delta}_g,\boldsymbol{H}\boldsymbol{\Delta}_g-\boldsymbol{\delta}\rangle-\langle \boldsymbol{\delta},\boldsymbol{H}\boldsymbol{g}_\lambda\rangle+ \\
&\qquad-\langle \boldsymbol{\delta},\boldsymbol{H}\boldsymbol{\Delta}_g-\boldsymbol{\delta}\rangle+2\lambda\langle \boldsymbol{g}_\lambda,\boldsymbol{\Delta}_g\rangle+\lambda\langle \boldsymbol{\Delta}_g,\boldsymbol{\Delta}_g)+2\langle \boldsymbol{H}\boldsymbol{g}_\lambda,\boldsymbol{\delta}\rangle-\langle \boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\delta}\rangle= \\
&\quad=2\langle \boldsymbol{H}\boldsymbol{g}_\lambda,\boldsymbol{H}\boldsymbol{\Delta}_g\rangle-2\langle \boldsymbol{H}\boldsymbol{g}_\lambda,\boldsymbol{\delta}\rangle+\langle \boldsymbol{H}\boldsymbol{\Delta}_g,\boldsymbol{H}\boldsymbol{\Delta}_g\rangle-\langle \boldsymbol{H}\boldsymbol{\Delta}_g,\boldsymbol{\delta}\rangle-\langle \boldsymbol{\delta},\boldsymbol{H}\boldsymbol{\Delta}_g\rangle+\langle \boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\delta}\rangle+ \\
&\qquad+2\lambda\langle \boldsymbol{g}_\lambda,\boldsymbol{\Delta}_g\rangle+\lambda\langle \boldsymbol{\Delta}_g,\boldsymbol{\Delta}_g\rangle+2\langle \boldsymbol{H}\boldsymbol{g}_\lambda,\boldsymbol{\delta}\rangle-\langle \boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\delta}\rangle= \\
&\quad=2\langle \boldsymbol{H}^*\boldsymbol{H}\boldsymbol{g}_\lambda,\boldsymbol{\Delta}_g\rangle+\langle \boldsymbol{H}\boldsymbol{\Delta}_g,\boldsymbol{H}\boldsymbol{\Delta}_g\rangle-2\langle \boldsymbol{H}^*\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\Delta}_g\rangle+2\lambda\langle \boldsymbol{g}_\lambda,\boldsymbol{\Delta}_g)+\lambda\langle \boldsymbol{\Delta}_g,\boldsymbol{\Delta}_g\rangle= \\
&\quad=2\langle \boldsymbol{H}^*\boldsymbol{H}\boldsymbol{g}_\lambda-\boldsymbol{H}^*\boldsymbol{\delta}+\lambda\boldsymbol{g}_\lambda,\boldsymbol{\Delta}_g\rangle+\langle \boldsymbol{H}\boldsymbol{\Delta}_g,\boldsymbol{H}\boldsymbol{\Delta}_g\rangle+\lambda\langle \boldsymbol{\Delta}_g,\boldsymbol{\Delta}_g\rangle= \\
&\quad=2\langle \boldsymbol{H}^*\boldsymbol{H}\boldsymbol{g}_\lambda-\boldsymbol{H}^*\boldsymbol{\delta}+\lambda\boldsymbol{g}_\lambda,\boldsymbol{\Delta}_g\rangle+\|\boldsymbol{H}\boldsymbol{\Delta}_g\|^2+\lambda\|\boldsymbol{\Delta}_g\|^2 \qquad \text{(A.1)}
\end{aligned}
$$

A.2. Przekształcenia dotyczące wzoru (3.74)

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}_2(\boldsymbol{g}_\lambda+\boldsymbol{\Delta}_g,\lambda)-\mathcal{L}_2(\boldsymbol{g}_\lambda,\lambda)=\\
&\quad=\langle \boldsymbol{g}_\lambda+\boldsymbol{\Delta}_g,\boldsymbol{g}_\lambda+\boldsymbol{\Delta}_g\rangle+\lambda\langle \boldsymbol{H}\boldsymbol{g}_\lambda+\boldsymbol{H}\boldsymbol{\Delta}_g-\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{H}\boldsymbol{g}_\lambda+\boldsymbol{H}\boldsymbol{\Delta}_g-\boldsymbol{\delta}\rangle-\lambda q_2-\langle \boldsymbol{g}_\lambda,\boldsymbol{g}_\lambda\rangle-\\
&\qquad+\lambda\langle \boldsymbol{H}\boldsymbol{g}_\lambda-\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{H}\boldsymbol{g}_\lambda-\boldsymbol{\delta}\rangle+\lambda q_2=\\
&\quad=\langle \boldsymbol{g}_\lambda+\boldsymbol{\Delta}_g,\boldsymbol{g}_\lambda\rangle+\langle \boldsymbol{g}_\lambda+\boldsymbol{\Delta}_g,\boldsymbol{\Delta}_g\rangle+\lambda\langle \boldsymbol{H}\boldsymbol{g}_\lambda-\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{H}\boldsymbol{g}_\lambda+\boldsymbol{H}\boldsymbol{\Delta}_g-\boldsymbol{\delta}\rangle+\\
&\qquad+\lambda\langle \boldsymbol{H}\boldsymbol{\Delta}_g-\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{H}\boldsymbol{g}_\lambda+\boldsymbol{H}\boldsymbol{\Delta}_g-\boldsymbol{\delta}\rangle-\langle \boldsymbol{g}_\lambda,\boldsymbol{g}_\lambda\rangle-\lambda\langle \boldsymbol{H}\boldsymbol{g}_\lambda-\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{H}\boldsymbol{g}_\lambda-\boldsymbol{\delta}\rangle=\\
&\quad=\langle \boldsymbol{g}_\lambda,\boldsymbol{g}_\lambda\rangle+\langle \boldsymbol{\Delta}_g,\boldsymbol{g}_\lambda\rangle+\langle \boldsymbol{g}_\lambda,\boldsymbol{\Delta}_g\rangle+\langle \boldsymbol{\Delta}_g,\boldsymbol{\Delta}_g\rangle+\lambda\langle \boldsymbol{H}\boldsymbol{g}_\lambda-\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{H}\boldsymbol{g}_\lambda-\boldsymbol{\delta}\rangle+\\
&\qquad+\lambda\langle \boldsymbol{H}\boldsymbol{g}_\lambda-\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{H}\boldsymbol{\Delta}_g\rangle+\lambda\langle \boldsymbol{H}\boldsymbol{\Delta}_g,\boldsymbol{H}\boldsymbol{g}_\lambda-\boldsymbol{\delta}\rangle+\lambda\langle \boldsymbol{H}\boldsymbol{\Delta}_g,\boldsymbol{H}\boldsymbol{\Delta}_g\rangle-\langle \boldsymbol{g}_\lambda,\boldsymbol{g}_\lambda\rangle-\\
&\qquad+\lambda\langle \boldsymbol{H}\boldsymbol{g}_\lambda-\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{H}\boldsymbol{g}_\lambda-\boldsymbol{\delta}\rangle=\\
&\quad=\langle \boldsymbol{g}_\lambda,\boldsymbol{\Delta}_g\rangle+\langle \boldsymbol{g}_\lambda,\boldsymbol{\Delta}_g\rangle+\langle \boldsymbol{\Delta}_g,\boldsymbol{\Delta}_g\rangle+\lambda\langle \boldsymbol{H}^*\boldsymbol{H}\boldsymbol{g}_\lambda-\boldsymbol{H}^*\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\Delta}_g\rangle+\\
&\qquad+\lambda\langle \boldsymbol{H}\boldsymbol{g}_\lambda-\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{H}\boldsymbol{\Delta}_g\rangle+\lambda\langle \boldsymbol{H}\boldsymbol{\Delta}_g,\boldsymbol{H}\boldsymbol{\Delta}_g\rangle=\\
&\quad=2\langle \boldsymbol{g}_\lambda,\boldsymbol{\Delta}_g\rangle+\langle \boldsymbol{\Delta}_g,\boldsymbol{\Delta}_g\rangle+\lambda\langle \boldsymbol{H}^*\boldsymbol{H}\boldsymbol{g}_\lambda-\boldsymbol{H}^*\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\Delta}_g)+\lambda\langle \boldsymbol{H}^*\boldsymbol{H}\boldsymbol{g}_\lambda-\boldsymbol{H}^*\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\Delta}_g\rangle+\\
&\qquad+\lambda\langle \boldsymbol{H}\boldsymbol{\Delta}_g,\boldsymbol{H}\boldsymbol{\Delta}_g\rangle=\\
&\quad=2\langle \boldsymbol{g}_\lambda,\boldsymbol{\Delta}_g\rangle+2\lambda\langle \boldsymbol{H}^*\boldsymbol{H}\boldsymbol{g}_\lambda-\boldsymbol{H}^*\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\Delta}_g\rangle+\lambda\langle \boldsymbol{h}\boldsymbol{\Delta}_g,\boldsymbol{h}\boldsymbol{\Delta}_g\rangle+\langle \boldsymbol{\Delta}_g,\boldsymbol{\Delta}_g\rangle=\\
&\quad=2\langle \boldsymbol{g}_\lambda+\lambda\boldsymbol{H}^*\boldsymbol{H}\boldsymbol{g}_\lambda-\lambda\boldsymbol{H}^*\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\Delta}_g\rangle+\lambda\langle \boldsymbol{H}\boldsymbol{\Delta}_g,\boldsymbol{H}\boldsymbol{\Delta}_g\rangle+\langle \boldsymbol{\Delta}_g,\boldsymbol{\Delta}_g\rangle=\\
&\quad=2\langle \boldsymbol{g}_\lambda+\lambda\boldsymbol{H}^*\boldsymbol{H}\boldsymbol{g}_\lambda-\lambda\boldsymbol{H}^*\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\Delta}_g\rangle+\lambda\|\boldsymbol{H}\boldsymbol{\Delta}_g\|^2+\|\boldsymbol{\Delta}_g\|^2 \qquad \text{(A.2)}
\end{aligned}
$$

B. Dowody twierdzeń

B.1. Twierdzenie 2.3 - część przyczynowa

Uwzględnienie wielokrotności biegunów transmitancji $T^+(z)$ przy obliczaniu całki we wzorze (2.31) metodą residuów prowadzi do następującej ogólnej zależności

$$\begin{aligned}
i_n^+ &= \sum_{k=1}^{P^+} \operatorname*{res}_{z=p_k^+} \left(T^+(z)z^{n-1}\right) = \\
&= \sum_{k=1}^{P^+} \frac{1}{(\sigma_k^+-1)!} \lim_{z\to p_k^+} \left[\frac{d^{\sigma_k^+-1}}{dz^{\sigma_k^+-1}} \left(T^+(z)z^{n-1}\left(z-p_k^+\right)^{\sigma_k^+}\right)\right] = \\
&= \sum_{k=1}^{P^+} \frac{1}{(\sigma_k^+-1)!} \lim_{z\to p_k^+} \left[\frac{d^{\sigma_k^+-1}}{dz^{\sigma_k^+-1}} \left(T^+(z)\left(z-p_k^+\right)^{\sigma_k^+}\right) z^{n-1} + \right. \\
&\quad \left. + T^+(z)\left(z-p_k^+\right)^{\sigma_k^+} \frac{d^{\sigma_k^+-1}}{dz^{\sigma_k^+-1}} z^{n-1}\right]_{z=p_k^+} = \\
&= \sum_{k=1}^{P^+} \frac{1}{(\sigma_k^+-1)!} \left[\underbrace{\lim_{z\to p_k^+} \frac{d^{\sigma_k^+-1}}{dz^{\sigma_k^+-1}} \left(T^+(z)\left(z-p_k^+\right)^{\sigma_k^+}\right)}_{1} \underbrace{\lim_{z\to p_k^+} z^{n-1}}_{2} + \right. \\
&\quad \left. + \underbrace{\lim_{z\to p_k^+} \left(T^+(z)\left(z-p_k^+\right)^{\sigma_k^+}\right)}_{3} \underbrace{\lim_{z\to p_k^+} \frac{d^{\sigma_k^+-1}}{dz^{\sigma_k^+-1}} z^{n-1}}_{4}\right]
\end{aligned} \tag{B.1}$$

Przy rozpatrywaniu absolutej sumowalności ciągu $\{i_n^+\}$ dla $n \geqslant 0$ należy więc przeanalizować zachowanie się każdego z czterech składników nie tylko przy $z \to p_k^+$ lecz również przy $n \to \infty$.

Pierwszy z czynników znajdujących się pomiędzy nawiasami kwadratowymi we wzorze (B.1) przyjmuje zawsze pewną stałą wartość $a(p_k^+)$ zależną tylko od wartości biegunów p_k^+, natomiast niezależną od indeksu n próbek i_n^+ wyznaczanej odpowiedzi impulsowej. Również

trzeci czynnik nie zależy od indeksu n, zatem możemy zapisać

$$\lim_{z\to p_k^+} \frac{d^{\sigma_k^+-1}}{dz^{\sigma_k^+-1}} \left(T^+(z) \left(z - p_k^+ \right)^{\sigma_k^+} \right) = a(p_k^+) \tag{B.2}$$

$$\lim_{z\to p_k^+} \left(T^+(z) \left(z - p_k^+ \right)^{\sigma_k^+} \right) = b(p_k^+) \tag{B.3}$$

Udowodnienie absolutnej zbieżności ciągu $\{i_n\}$ wymaga zatem przeanalizowanie zachowania się czynnika drugiego i czwartego we wzorze (B.1) dla $n \to \infty$.

W przypadku czynnika drugiego, granica ciągu może zostać obliczona przez bezpośrednie podstawienie, przez co otrzymujemy

$$\lim_{z\to p_k^+} z^{n-1} = \left(p_k^+ \right)^{n-1} \tag{B.4}$$

Z kolei granica przy $n \to \infty$ wynosi

$$\lim_{n\to\infty} \left(p_k^+ \right)^{n-1} = 0 \tag{B.5}$$

ponieważ $\left| p_k^+ \right| < 1$.

Pochodna wyrażenia z^{n-1} w czynniku czwartym wynosi

$$\underbrace{(n-1)(n-2)\dots(n-(\sigma_k^+-1))}_{\sigma_k^+-1 \text{ czynników}} z^{n-(\sigma_k^+-1)-1} \tag{B.6}$$

zatem jej granica może zostać obliczona również przez bezpośrednie podstawienie, co prowadzi do następującego wyniku

$$\begin{aligned} \lim_{z\to p_k^+} (n-1)(n-2)\dots(n-(\sigma_k^+-1)) z^{n-(\sigma_k^+-1)-1} = \\ = (n-1)(n-2)\dots(n-(\sigma_k^+-1)) \left(p_k^+ \right)^{n-(\sigma_k^+-1)-1} \end{aligned} \tag{B.7}$$

Sprawdzenie zachowania się tego czynnika przy $n \to \infty$ nie jest już niestety możliwe poprzez bezpośrednie podstawienie $n = \infty$, gdyż otrzymuje się wtedy nieoznaczoność typu $\infty \cdot 0$. Można jednak przeprowadzić wyznaczanie granicy równoważnego wyrażenia

$$\frac{(n-1)(n-2)\dots(n-(\sigma_k^+-1))}{\frac{1}{\left(p_k^+ \right)^{n-(\sigma_k^+-1)-1}}} \tag{B.8}$$

które przy bezpośrednim podstawieniu daje nieoznaczoność typu $\frac{\infty}{\infty}$ pozwalającą na zastosowanie twierdzenia de l'Hospitala. $(\sigma_k^+ - 1)$-krotne różniczkowanie licznika i mianownika w (B.8) prowadzi do uzyskania wyrażenia

$$\frac{(\sigma_k^+ - 1)!}{(-1)^{\sigma_k^+ - 1} \frac{\left[\ln(p_k^+)\right]^{\sigma_k^+ - 1}}{\left(p_k^+\right)^{n-(\sigma_k^+ - 1)}}} \tag{B.9}$$

Teraz łatwo już zauważyć, że dla $|p_k^+| < 1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\sigma_k^+ - 1)!}{(-1)^{\sigma_k^+ - 1} \frac{\left[\ln(p_k^+)\right]^{\sigma_k^+ - 1}}{\left(p_k^+\right)^{n-(\sigma_k^+ - 1)}}} = 0 \tag{B.10}$$

Ostatecznie widać, że ze względu na dążenie zarówno czynnika drugiego, jak i czwartego w wyrażeniu (B.1) do zera przy $n \to \infty$, również

$$\lim_{n\to\infty} i_n^+ = 0 \tag{B.11}$$

co gwarantuje absolutną sumowalność ciągu $\{i_n^+\}$.

B.2. Twierdzenie 2.3 - część antyprzyczynowa

W podobny sposób jak w punkcie B.1 można udowodnić absolutną sumowalność odpowiedzi impulsowej i_n^- przy $n \to -\infty$ w przypadku układu dyskretnego o biegunach leżących na zewnątrz koła jednostkowego. Wtedy przy uwzględnieniu wielokrotności biegunów i wyznaczaniu wartości próbek i_n^- w oparciu o metodę residuów, wzór (2.37) przyjmie postać

$$i_n^- = \sum_{k=1}^{P^-} \frac{1}{(\sigma_k^- - 1)!} \lim_{v \to \frac{1}{p_k^-}} \left[\frac{d^{\sigma_k^- - 1}}{dz^{\sigma_k^- - 1}} \left(T^-(v^{-1}) v^{-n-1} \left(v^{-1} - p_k^- \right)^{\sigma_k^-} \right) \right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{P^-} \frac{1}{(\sigma_k^- - 1)!} \Bigg[\underbrace{\lim_{v \to \frac{1}{p_k^-}} \frac{d^{\sigma_k^- - 1}}{dz^{\sigma_k^- - 1}} \left(T^-(v^{-1}) \left(v^{-1} - p_k^- \right)^{\sigma_k^-} \right)}_{1} \underbrace{\lim_{v \to \frac{1}{p_k^-}} v^{-n-1}}_{2} +$$

$$+ \underbrace{\lim_{v \to \frac{1}{p_k^-}} \left(T^-(v^{-1}) \left(v^{-1} - p_k^- \right)^{\sigma_k^-} \right)}_{3} \underbrace{\lim_{v \to \frac{1}{p_k^-}} \frac{d^{\sigma_k^- - 1}}{dz^{\sigma_k^- - 1}} v^{-n-1}}_{4} \Bigg] \tag{B.12}$$

Również w tym przypadku dla czynnika pierwszego i trzeciego można napisać, że

$$\lim_{v \to \frac{1}{p_k^-}} \frac{d^{\sigma_k^- - 1}}{dz^{\sigma_k^- - 1}} \left(T^-(v^{-1}) \left(v^{-1} - p_k^- \right)^{\sigma_k^-} \right) = a \left(\frac{1}{p_k^-} \right) \tag{B.13}$$

$$\lim_{v \to \frac{1}{p_k^-}} \left(T^-(v^1) \left(v^{-1} - p_k^- \right)^{\sigma_k^-} \right) = b \left(\frac{1}{p_k^-} \right) \tag{B.14}$$

tzn. granice te przyjmują zawsze pewne określone wartości zależne tylko od wartości biegunów p_k^- nie zależąc przy tym od indeksu n.

W przypadku czynnika drugiego

$$\lim_{v \to \frac{1}{p_k^-}} v^{-n-1} = \left(\frac{1}{p_k^-} \right)^{-n-1} \tag{B.15}$$

Natomiast granica przy $n \to -\infty$ wynosi

$$\lim_{n \to -\infty} \left(\frac{1}{p_k^-} \right)^{-n-1} = 0 \tag{B.16}$$

ponieważ $\left| p_k^- \right| > 1$.

Pochodna wyrażenia v^{-n-1} w czynniku czwartym wynosi

$$\underbrace{(-n-1)(-n-2)\dots(-n-(\sigma_k^- - 1))}_{\sigma_k^- - 1 \text{ czynników}} v^{-n-(\sigma_k^- - 1)-1} \tag{B.17}$$

Z kolei granica

$$\lim_{v \to \frac{1}{p_k^-}} (-n-1)(-n-2)\dots(-n-(\sigma_k^- - 1)) v^{-n-(\sigma_k^+ - 1)-1} =$$

$$= (-n-1)(-n-2)\dots(-n-(\sigma_k^- - 1)) \left(\frac{1}{p_k^-} \right)^{-n-(\sigma_k^- - 1)-1} \tag{B.18}$$

Przy obliczaniu granicy dla $n \to -\infty$ uzyskaną zależność (B.18), podobnie jak w punkcie B.1, przekształcono do postaci umożliwiającej zastosowanie twierdzenia de l'Hospitala. Wtedy łatwo już zauważyć, że

$$\lim_{n\to-\infty} \frac{(-1)^{\sigma_k^- -1}(\sigma_k^- - 1)!}{(-1)^{\sigma_k^- -1}\left(\frac{1}{p_k^-}\right)^{n+(\sigma_k^- -1)}\left[\ln\left(\frac{1}{p_k^-}\right)\right]^{\sigma_k^- -1}} = 0 \tag{B.19}$$

Ostatecznie ze względu na zerowanie się czynników drugiego i czwartego w wyrażeniu (B.12) przy $n \to -\infty$, również

$$\lim_{n\to-\infty} i_n^- = 0 \tag{B.20}$$

co gwarantuje absolutną sumowalność ciągu $\{i_n^-\}$.

B.3. Twierdzenie 3.2

Niech będzie dana macierz $\boldsymbol{A}$ operatora splotu postaci

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,N} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N,0} & a_{N,1} & \cdots & a_{N,N} \end{bmatrix} \tag{B.21}$$

gdzie N jest liczbą parzystą[1], a elementy $a_{i,j} \in \mathbb{R}$, gdzie $i, j = 0, 1, \ldots, N$, dla których różnica indeksów $i - j$ jest taka sama, mają taką samą wartość. Niech dany będzie również wektor $\boldsymbol{\delta}$ postaci

$$\boldsymbol{\delta} = [\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_N]^T \tag{B.22}$$

reprezentujący deltę Kroneckera, tzn. wartości współrzędnych δ_j wektora, gdzie $j = 0, 1, \ldots, N$ określane są według poniższej zależności

$$\delta_j = \begin{cases} 0 & \text{dla } j \neq \frac{N}{2} \\ 1 & \text{dla } j = \frac{N}{2} \end{cases} \tag{B.23}$$

Na podstawie (3.32) oraz działań na macierzach, działanie realizowane po prawej stronie równości (3.36) można zapisać następująco

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{b}, \quad \text{gdzie} \quad b_n = \sum_{k=0}^{N} a_{k,n}\delta_k, \quad n = 0, 1, \ldots N \tag{B.24}$$

[1]Niniejsze założenie wynika z przyjętego sposobu reprezentacji sygnałów nieprzyczynowych w postaci wektorów.

Biorąc pod uwagę (B.23), wartości b_n dane są zależnością

$$b_n = a_{\frac{N}{2},n}, \quad n = 0, 1, \ldots N \tag{B.25}$$

Mnożenie macierzy przez wektor określane jest następująco

$$\boldsymbol{A\delta} = \boldsymbol{d}, \quad \text{gdzie} \quad d_n = \sum_{k=0}^{N} a_{n,k}\delta_k, \quad n = 0, 1, \ldots N \tag{B.26}$$

Inwersja czasowa polega na odwróceniu kolejności współrzędnych wektora, zatem działanie występujące po lewej stronie równości (3.36) można przedstawić jak poniżej.

$$(\boldsymbol{A\delta})^\sharp = \boldsymbol{c}, \quad \text{gdzie} \quad c_{N-n} = \sum_{k=0}^{N} a_{n,k}\delta_k, \quad n = 0, 1, \ldots N \tag{B.27}$$

Podobnie jak wcześniej, ze względu na (B.23)

$$c_{N-n} = a_{n,\frac{N}{2}}, \quad n = 0, 1, \ldots N \tag{B.28}$$

Zmieńmy sosób indeksowania we wzorze (B.28) przyjmując, że $N - n = m$. Wtedy (B.28) przyjmie postać

$$c_m = a_{N-m,\frac{N}{2}}, \quad m = 0, 1, \ldots N \tag{B.29}$$

Wracając do poprzedniego oznaczenia, tj. przyjmując $m = n$ otrzymujemy

$$c_n = a_{N-n,\frac{N}{2}}, \quad n = 0, 1, \ldots N \tag{B.30}$$

Ponieważ $a_{N-n,\frac{N}{2}} = a_{\frac{N}{2},n}$, gdyż dla każdego $n = 0, 1, \ldots, N$ różnice ich indeksów są sobie równe, tj.

$$N - n - \frac{N}{2} = \frac{N}{2} - n \tag{B.31}$$

zatem również $c_n = b_n$, z czego wynika równość

$$(\boldsymbol{A\delta})^\sharp = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\delta} \tag{B.32}$$

co kończy dowód. ■

B.4. Twierdzenie 3.3

Niech będzie dana macierz $\boldsymbol{A}$ operatora splotu postaci

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,N} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N,0} & a_{N,1} & \cdots & a_{N,N} \end{bmatrix} \tag{B.33}$$

gdzie N jest liczbą parzystą[2], a elementy $a_{i,j} \in \mathbb{R}$, gdzie $i, j = 0, 1, \ldots, N$, dla których różnica indeksów $i - j$ jest taka sama, mają taką samą wartość. Niech dany będzie również wektor $\boldsymbol{b}$ postaci

$$\boldsymbol{b} = [b_0, b_1, \ldots, b_N]^T \tag{B.34}$$

gdzie $b_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, 1, \ldots, N$.

Iloczyn macierzy $\boldsymbol{A}$ i wektora $\boldsymbol{b}$ można zapisać następująco

$$\boldsymbol{Ab} = \boldsymbol{c}, \quad \text{gdzie} \quad c_n = \sum_{k=0}^{N} a_{n,k} b_k, \quad n = 0, 1, \ldots N \tag{B.35}$$

Jeśli macież $\boldsymbol{A}^*$ jest macierzą operatora sprzężonego, zaś wektor $\boldsymbol{b}$ zostanie poddany operacji inwersji czasowej, wtedy

$$\boldsymbol{A}^* \boldsymbol{b}^\sharp = \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{b}^\sharp = \boldsymbol{e}, \quad \text{gdzie} \quad e_n = \sum_{k=0}^{N} a_{k,n} b_{N-k}, \quad n = 0, 1, \ldots N \tag{B.36}$$

Przeprowadzenie dodatkowo inwersji czasowej na działaniu określonym wzorem (B.36) wymaga jedynie odwrócenia kolejności uzyskiwanych współrzch, stąd

$$\left(\boldsymbol{A}^* \boldsymbol{b}^\sharp\right)^\sharp = \left(\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{b}^\sharp\right)^\sharp = \boldsymbol{d}, \quad \text{gdzie} \quad d_{N-n} = \sum_{k=0}^{N} a_{k,n} b_{N-k}, \quad n = 0, 1, \ldots N \tag{B.37}$$

Zmieniając sposób indeksowania współrzędnych wektora $\boldsymbol{d}$ we wzorze (B.37) w wyniku podstawienia $N - n = m$, otrzymuje się

$$d_m = \sum_{k=0}^{N} a_{k,N-m} b_{N-k}, \quad m = 0, 1, \ldots N \tag{B.38}$$

Zmieniając m na n

$$d_n = \sum_{k=0}^{N} a_{k,N-n} b_{N-k}, \quad n = 0, 1, \ldots N \tag{B.39}$$

Podobnie zmieniono sposób indeksowania współrzędnych wektora $\boldsymbol{b}$ zakładając $N - k = p$. Wtedy wzór (B.39) przyjmie postać

$$d_n = \sum_{p=0}^{N} a_{N-p,N-n} b_p, \quad n = 0, 1, \ldots N \tag{B.40}$$

Zmieniając p na k otrzymuje się

$$d_n = \sum_{k=0}^{N} a_{N-k,N-n} b_k, \quad n = 0, 1, \ldots N \tag{B.41}$$

[2]Niniejsze założenie, podobnie jak w punkcie B.3, wynika z przyjętego sposóbu reprezentacji sygnałów nieprzyczynowych w postaci wektorów.

Ponieważ $c_n = d_n$, gdyż $a_{n,k} = a_{N-k,N-n}$, co jest spowodowane równością różnic ich indeksów dolnych, tj.

$$N - k - (N - n) = n - k \tag{B.42}$$

zatem

$$\boldsymbol{Ab} = \left(\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{b}^{\sharp}\right)^{\sharp} \tag{B.43}$$

co kończy dowód. ■

Bibliografia

[1] Arias-de-Reyna E., Acha J.I.: „A new method for designing efficient linear phase recursive filters". *Digital Signal Processing*, vol. 14, No. 1, 2004, pp. 1–17.

[2] Bakó T.B., Dabóczi T.: „Reconstruction of Nonlineary Distorted Signals With Regularized Inverse Characteristics". *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 51, No. 5, 2002, pp. 1019–1022.

[3] Bakó T.B., Dabóczi T. Bell B.A.: „Automatic Compensation of Nonlinear Distortions". *IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference*, Anchorage, AK, USA, 21-23 May 2002.

[4] Bolikowski J.: *„Podstawy projektowania inteligentnych przetworników pomiarowych wielkości elektrycznych"*. Wydawnictwo Wyższej Szkoły Inżynierskiej w Zielonej Górze, Zielona Góra 1993.

[5] Borodziewicz W., Jaszczak K.: *„Cyfrowe przetwarzanie sygnałów: Wybrane zagadnienia"*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1987.

[6] Boulet B., Kadar L., Wikston J.: „Real-Time Compensation of Instrument Transformer Dynamics Using Frequency-Domain Interpolation Technique". *IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference*, Ottawa, Canada, May 19–21, 1997, pp. 285–290.

[7] Burnett G.C.: *„The physiological Basis of Glottal Electromagnetic Micropower Sensors (GEMS) and Their Use in Defining an Excitation Function for the Human Vocal Tract"*. Ph.D. dissertation, University of California, 1999.

[8] Chun J., Bose N.K.: „Fast Evaluation of an Integral Occurring in Digital Filtering Applications". *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 43, No. 8, 1995, pp. 1982–1986.

[9] Crilly P.B.: „A Quantitative Evaluation of Iterative Deconvolution Algorithms". *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 40, No. 3, 1991, pp. 558–562.

[10] Czarnach R.: „Recursive Processing by Noncausal Digital Filters". *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. ASSP-30, No. 3, 1982, pp. 363–370.

[11] Dabóczi T., Bakó T.B.: „Image Filtering of Optical Images". *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 50, No. 4, 2001, pp. 991–994.

[12] Dąbrowski A.: *„Przetwarzanie sygnałów przy użyciu procesorów sygnałowych".* Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań 1998.

[13] Demoment G.: „Image reconstruction and Restoration: Overview of Common Estimation Structures and Problems". *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 37, No. 12, 1989, pp. 2024–2036.

[14] Djokić B., Popowić M., Lutovac M.: „An New Improvement to the Powell and Chau Linear Phase IIR Filters". *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 46, No. 6, 1998, pp. 1685–1688.

[15] Farina A., Ugolotti E., Bellini A., Cibelli G., Morandi C.: „Inverse numerical filters for linearisation of laudspeaker's response". *First COST-G6 Workshop on Digital Audio Effects*, Barcelona 1998.

[16] Fuks B.A., Szabat B.W.: *„Funkcje zmiennej zespolonej i niektóre ich zastosowania".* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1954.

[17] Furmankiewicz L.: *„Możliwość programowej korekcji błędów wnoszonych przez transformatorowe obwody wejściowe w przetwornikach mocy przy pomiarze sygnałów odkształconych".* Praca doktorska, Politechnika Zielonogórska, Zielona Góra 1998.

[18] Grigoryan A.M., Dougherty E.R.: „Optimization of Linear Filters Under Power-Spectral--Density Stabilization". *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 49, No. 10, 2001, pp. 2292–2300.

[19] Hayward G., Lewis J.E.: „A Theoretical Approach for Inverse Filter Design in Ultrasonic Applications". *IEEE Transactions on Ultrasonic, Ferroelectrics and Frequency Control*, vol. 36, No. 3, 1989, pp. 356–364.

[20] Izydorczyk J., Płonka G., Tyma G.: *„Teoria sygnałów. Wstęp”*. Wydawnictwo Helion, Gliwice 1999.

[21] Kaczorek T.: *„Wektory i macierze w automatyce i elektotechnice”*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1998.

[22] Kadar L., Hacksel P., Wikston J.: „The Effect of Current and Voltage Transformers Accuracy on Harmonic Measurements in Electric Arc Furnaces”. *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 33, no. 3, 1997, pp. 780–783.

[23] Kollár I., Pintelon R., Rolain Y., Schoukens J.: „Another Step Towards an Ideal Data Acquisition Channel”. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 40, No. 3, 1991, pp. 659–660.

[24] Kollár I., Rolain Y.: „Complex Correction of Data Acquisition Channels Using FIR Equalizer Filters”. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 42, No. 5, 1993, pp. 920–924.

[25] Kormylo J.J., Jain V.K.: „Two-Pass Recursive Digital Filter with Zero Phase Shift”. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. ASSP-22, No. 5, 1974, pp. 384–387.

[26] Kozioł M.: „Synteza quasi-odwrotnych filtrów korekcyjnych w klasie układów antycypacyjnych”. *IV Ogólnopolskie Warsztaty Doktoranckie*, Gliwice Istebna-Zaolzie, vol. 14, 2002, ss. 349–354.

[27] Kozioł M: „Kompensacja wpływu charakterystyk częstotliwościowych nieminimalnofazowych układów zniekształcających”. *Przegląd Elektrotechniczny*, nr 6/2004, ss. 615–619.

[28] Kozioł M.: „Kompensacja charakterystyk częstotliwościowych układów o dyskretnej transmitancji z zerami na okręgu jednostkowym”. *Przegląd Elektrotechniczny*, nr 3/2005, ss. 93–98.

[29] Kozioł M.: „Realizacja stabilnych filtrów cyfrowych do zadań korekcyjnych”. *XXXVII Międzyuczelniana Konferencja Metrologów*, Zielona Góra 2005, ss. 243–250.

[30] Kozioł M.: „Stable Inverse Digital Filters for Correction Tasks”. *Signal Processing'2005 Workshop Proceedings*, Poznań 2005, pp. 45–50.

[31] Kudrewicz J.: *„Przekształcenie Z i równania różnicowe”*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2000.

[32] Kurosu A., Miyase S., Tomiyama S., Takebe T.: „A Technique to Truncate IIR Filter Impulse Response and Its Application to Real-Time Implementation of Linear-Phase IIR Filters”. *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 51, No. 5, 2003, pp. 1284–1292.

[33] Laakso T.I, Välimäki V.: „Energy-based effective length of the impulse response of a recursive filter”. *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 3, Seattle, Washington, May 12–15, 1998, pp. 1253–1256.

[34] Laakso T.I, Välimäki V.: „Energy-based Effective Length of the Impulse Response of a Recursive Filter”. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 48, no. 1, 1999, pp. 7–17.

[35] Leja F.: *„Funkcje zespolone”*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1979.

[36] Martos B.: *„Programowanie nieliniowe: Teoria i metody”*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1983.

[37] Mitra S.K., Keiser J.F.: *„Handbook for digital signal processing”*. John Wiley & Sons, Inc., New York 1993.

[38] Miyoshi M., Keneda Y.: „Inverse Filter of Room Acoustics”. *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 36, No. 2, 1988, pp. 145–152.

[39] Morawski R.Z.: „Unified Approach to Measurand Reconstruction”. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 43, No. 2, 1994, pp. 226–231.

[40] Morawski R.Z.: „Metody odtwarzania sygnałów pomiarowych”. Materiały pomocnicze do przedmiotu *Cyfrowe przetwarzanie sygnałów pomiarowych*, Warszawa 1998.

[41] Mouchtaris A., Reveliotis P., Kyriakakis C.: „Inverse Filter Design for Immersive Audio Rendering Over Laudspeakers”. *IEEE Transactions on Multimedia*, vol. 2, No. 2, 2000, pp. 77–87.

[42] Nalepa J.: „Badania symulacyjne wybranego algorytmu korekcji błędu dynamicznego metodą ”w ciemno” dla dwuinercyjnego toru pomiarowego”. *XII Sympozjum Modelowanie i Symulacja Systemów Pomiarowych*, Krynica 2002, ss. 183–190.

[43] Nelson P.A., Orduña-Bustamante F., Hamada H.: „Inverse Filter Design and Equalization Zones in Multichannel Sound Reproduction". *IEEE Transactions on Speech and Audio Processing*, vol. 3, No. 3, 1995, pp. 185–192.

[44] Oppenheim A.V., Schafer R.W.: *„Cyfrowe przetwarzanie sygnałów".* Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa 1979.

[45] Oppenheim A.V., Schafer R.W., Buck, J.R.: *„Discrete–Time Signal Processing".* Prentice-Hall Inc., 1999.

[46] Oppenheim A.V., Willsky A.S., Nawab S.H.: *„Signals & Systems".* Prentice-Hall International, Inc., 1997.

[47] Orfanidis S.J.: *„Introdution to Signal Processing".* Prentice-Hall International, Inc., 1996.

[48] Pintelon R., Rolain Y., Vanden Bossche M., Schoukens J.: „Towards an Ideal Data Acquisition Channel". *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 39, no. 1, 1990, pp. 116–120.

[49] Powell S.R., Chau P.M.: „A Technique for Realizing Linear Phase IIR Filters". *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 39, no. 11, 1991, pp. 2425–2435.

[50] Ramboz J.D.: „A High Accurate, Hand-Held Clamp-on Current Transformer". *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 45, no. 2, 1996, pp. 445–448.

[51] Riad S.M.: „The Deconvolution Problem: An Overview". *Proceedings of the IEEE*, vol. 74, no. 1, 1986, pp. 82–85.

[52] Rudin W.: *„Analiza rzeczywista i zespolona".* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1986.

[53] Siwczyński M.: *„Metody optymalizacyjne w teorii mocy obwodów elektrycznych".* Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków 1995.

[54] Siwczyński M.: *„Energetyczna teoria obwodów".* Wydawnictwo IGSMiE PAN, Kraków 2003.

[55] Siwczyński M., Kozioł M.: „Synteza quasi-odwrotnych filtrów korekcyjnych". *XXIV SPETO*, Gliwice 2001, ss. 329-334.

[56] Siwczyński M., Kozioł. M.: „Korekcyjne cyfrowe filtry odwrotne i quasi-odwrotne". *VI Szkoła-Konferencja Elektrotechnika Prądy Niesinusoidalne*, Zielona Góra 2002, ss. 205-212.

[57] Siwczyński M., Kozioł M.: „Synthesis of Optimised Digital Filters Used to Signal Correction in Measurement Systems". *IMEKO TC7 Symposium*, Kraków 2002, pp. 150-156.

[58] Wang J.: „An Iterative Algortihm for Inverse Filtering". *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. ASSP-33, No. 4, 1985, pp. 1051–1054.

[59] Willson Jr. A.N., Orchard H.J.: „An Improvement to the Powell and Chau Linear Phase IIR Filters". *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 42, No. 10, 1994, pp. 2842–2848.

[60] Xu Q., Refsum A., Watson R.: „Application of external compensation to current transformers". *IEE Proc.-Sci. Meas. Technol.*, vol. 143, No. 2, 1996, pp. 147–150.

[61] Zangwill W.I.: *„Programowanie nieliniowe".* Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1974.

[62] Zieliński T.P.: *„Od teorii do cyfrowego przetwarzania sygnałów".* Wydział EAIiE AGH, Kraków 2002.